

# Thèse de Doctorat

**Jonathan MONSIFROT**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université de Nantes  
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

**École doctorale : Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques (STIM)**

**Discipline : Traitement du signal et des images, section CNU 61**

**Unité de recherche : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN)**

**Soutenue le 11 Décembre 2013**

**Thèse n° : ED 503-212**

## **Modélisation de signaux électromyographiques par des processus de renouvellement - Filtre bayésien pour l'estimation séquentielle de paramètres à destination de la commande d'une prothèse d'avant-bras**

### **JURY**

Président :	<b>M. David GUIRAUD</b> , Directeur de Recherche INRIA, Université de Montpellier - LIRMM
Rapporteurs :	<b>M. David BRIE</b> , Professeur, Université de Lorraine <b>M. Emmanuel DUFLOS</b> , Professeur, École Centrale de Lille
Examineurs :	<b>M. Dario FARINA</b> , Professeur, Universitätsmedizin Göttingen, Georg-August-Universität, Allemagne <b>M. Yannick Aoustin</b> , Maître de conférences (HDR), Université de Nantes <b>M. Eric LE CARPENTIER</b> , Maître de conférences, École Centrale de Nantes
Invité :	<b>M. Antoine NORDEZ</b> , Maître de conférences (HDR), Université de Nantes - STAPS
Directeur de thèse :	<b>M. Yannick Aoustin</b> , Maître de conférences (HDR), Université de Nantes
Co-directeur de thèse :	<b>M. Eric LE CARPENTIER</b> , Maître de conférences, École Centrale de Nantes



*À Ophélie...*



*À Sou...*



## Remerciements

Je tenais à remercier toutes les personnes qui ont pu et su m'aider, me soutenir, discuter avec moi, me faire découvrir de nouveaux domaines et de nouveaux horizons ou, plus simplement, avec qui j'ai pu passer un bon moment durant la préparation de cette thèse.

Mes premiers remerciements vont vers les membres du jury. Je suis heureux qu'Emmanuel Duflos et David Brie aient accepté de rapporter ma thèse et d'avoir ouvert de nombreuses pistes de réflexion lors de la soutenance. Je tiens aussi à saluer la présence de David Guiraud, président du jury, et d'Antoine Nordez qui ont su voir un intérêt du travail réalisé pour le milieu médical. Les discussions ont été passionnantes.

Je remercie Dario Farina d'avoir tout fait pour être présent lors de la soutenance de ma thèse. Sa vision très large du sujet et ses connaissances dans de nombreux domaines ont permis d'orienter ma thèse dans une direction très intéressante. Dario a pu m'accueillir dans son laboratoire pendant près d'un mois, ce qui a permis, je pense, de donner un aspect très concret à ma thèse. J'espère sincèrement continuer la collaboration entreprise.

Je tiens tout particulièrement à remercier Éric Le Carpentier de m'avoir contacté et appuyé pour cette thèse ainsi que de son encadrement durant ces trois années. Sa persévérance et sa rigueur scientifique m'ont permis de progresser de façon considérable dans le domaine du traitement du signal. Je tiens aussi à remercier Yannick Aoustin pour ces nombreuses remarques et corrections (en anglais et en français) qui ont amélioré la clarté de ma thèse. Sa réactivité, son enthousiasme et sa détermination infaillibles ont contribué au bon déroulement de ma thèse.

Je souhaite aussi remercier les équipes ADTSI et Robotique qui m'ont accueilli au sein de l'IRCCyN. La participation aux séminaires, conférences, les discussions et la qualité scientifique des membres de ces équipes m'ont permis de découvrir le monde de la Recherche sur thématiques de recherche de pointe. Je tiens à souligner les encadrements administratifs et scientifiques réalisés par Jérôme Idier et par Philippe Wenger. Ils m'ont permis d'aller présenter mes travaux dans des conférences nationales et internationales.

Je ne peux que remercier le laboratoire IRCCyN de m'avoir accueilli durant cette thèse. Le directeur Michel Malabre, le personnel administratif (je pense tout particulièrement à Emily Thureau) et tous les autres membres de l'Université de Nantes ont largement contribué au succès de cette thèse. Je tiens à noter que le professionnalisme du personnel, le confort du bâtiment, les équipements mis à disposition, les ressources physiques et électroniques font de l'IRCCyN un cadre idéal pour mener des recherches.

Je tiens aussi à remercier les enseignants-chercheurs et les chercheurs avec qui j'ai pu travailler lors de l'encadrement des élèves-ingénieurs à l'École Centrale de Nantes. Leurs connaissances et leurs compétences m'ont permis de progresser tant sur le plan scientifique que sur le plan pédagogique. Merci à Yide Wang pour sa gestion de l'ED STIM et à Stéphanie Legeay qui a animé l'ED.

Un grand merci à tous les doctorants et doctorantes que j'ai pu croiser durant la thèse. Les déjeuners et les pauses ont pu être un moment de forte convivialité, ainsi que lors des sorties organisées par beaucoup d'entre nous. Cela a largement contribué à la joie de faire une thèse. Je pense notamment aux anciens, Céline, Dominique, Ruina, Inès, Tomas, Denis, Sébastien, Carlos, David, Bassel et Xavier et aux nouveaux Adrien Bubu, Maxime, Ewen, Maxime, Julien, Marie, Lauriane, Oleg, ainsi qu'aux doctorants et doctorantes de l'AED et du CRIEC qui ont su animer le quotidien. Je pense aussi à Corentin et Mohamed avec qui j'ai pu largement discuter de ma thèse.

Je réserve un remerciement particulier à mon co-bureau Assaad, qui, grâce à sa bonne humeur et ses grandes qualités professionnelles, m'a aidé au quotidien. J'espère que j'ai pu en faire autant. Merci pour toutes les discussions, notamment celles qui m'ont fait découvrir à distance l'Algérie (et ses 45°C à l'ombre en plein été !).

Un remerciement tout particulier à ceux qui ont eu la (mal)heureuse chance de m'accompagner durant les trois ans, Charifa et ses franches parties de rigolade, et bien sûr Nadine, Maïssa, et Sylvain avec qui l'espace pause a pu être un endroit de partage (je pense au choco-pas-bons, chocolats et autres gâteaux maison), de fou-rire (ce serait-on moqué de quelqu'un en trois ans ? non...) et de craquages nerveux en tout genre... Merci encore pour tous ces bons moments.

Une pensée va tout particulièrement à mes amis de longue date (et oui, sept ans déjà) Benoît, Py, Tata, Cédric, Yo avec qui les week-ends et les vacances ont été sportifs et pleins d'inattendus ! Je me souviens tout particulièrement d'un certain éléphant en Afrique du Sud et d'une « petite » pluie à Saint-Christo. Merci aussi pour les nombreux mails hilarants et tous les autres bons souvenirs. J'espère que cela continuera après ma thèse !

Je remercie aussi d'autres personnes que j'ai pu rencontrer lors de cette thèse. Je pense à Guillaume, super-colocataire, à Jérèm, joueur intense, à Stéphane, joueur vintage, à Maylis, rayon de soleil du Sud-Ouest, à Chris Laine, l'expert en décomposition, Thomas Lorrain, le motard allemand, Simon, Myrtille, Alison et Marie...

Et que dire du soutien que m'a apporté ma famille durant ces trois ans. Merci à ma mère et mon grand-père pour les nombreux débats animés par téléphone, à mes sœurs Jessy et Bèr pour les bonnes retrouvailles lors de mes cours séjours à Nice. Je tiens à saluer la performance de ma grand-mère d'avoir pu me parler au téléphone (lorsqu'il était libre...) et à mon frère Barth d'avoir fondé une famille. Je tiens à nouveau à remercier ma mère et aussi mon père de m'avoir aidé à distance autant qu'ils ont pu, le quotidien recèle d'imprévus ! Je suis très fier que vous soyez venu à ma soutenance.

Un remerciement très spécial pour Oph' qui m'a accompagné et supporté du début à la fin de cette thèse. J'espère que cela continuera après. Elle a su écouter mes problèmes et me faire rire tout le long, un grand soutien moral. Je te remercie pour tous les bons moments, les sorties nouvelles, les films découverts ou revus, les nombreuses musiques, les pâtes à la crème, les parties endiablées (qui a dit que j'étais nul au Gobb'it ?), les trajets partagés... Je pense que ce que je ressens est indicible, je m'en tiendrais donc à « Merci, merci, merci à toi ! ».

Un dernier remerciement va à la petite Sou, qui a été présente dans ma vie professionnelle et personnelle. Je me souviens des nombreuses batailles d'eau, des imitations et des messages hilarants, et j'espère que ça continuera. Merci de m'avoir aidé pendant la rédaction de la thèse et le jour de la soutenance, tu m'as vraiment gâté ! Tu sais me faire rire quand ça ne va pas, mais aussi quand ça va bien. J'espère que je t'aiderai autant que tu as pu le faire, car ton soutien a largement contribué à la bonne fin de mes travaux de thèse. Merci-maou à toi...



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>9</b>
<b>Table des figures</b>	<b>13</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>15</b>
1.1 Projet	15
1.2 Plan du manuscrit	16
1.3 Notations	17
<b>2 Cadre et problématique de l'étude</b>	<b>19</b>
2.1 Brefs rappels de physiologie	19
2.1.1 Physiologie	19
2.1.2 Électromyogramme	19
2.2 Problématique de l'étude	20
2.3 Utilisation des signaux dans les prothèses d'avant-bras	21
2.3.1 Les prothèses d'avant-bras	21
Des prothèses déjà existantes	21
Des avancées scientifiques et technologiques	22
Comparaison de l'avant-bras humain et d'une prothèse d'avant-bras	23
2.3.2 Les méthodes de traitement hors-ligne et en ligne des signaux EMG	23
Informations fournies à la prothèse	24
2.4 Modélisation du signal iEMG	25
2.4.1 Modélisation convolutive	25
2.4.2 Forme des MUAP	25
<b>3 Modélisation et estimation d'un processus impulsionnel</b>	<b>27</b>
3.1 Train d'impulsions	27
3.1.1 Modèle	27
3.1.2 Modélisation du processus inter-impulsion	28
3.1.3 Chaîne de Markov	29
3.1.4 Masse de probabilité des temps inter-impulsion $\Delta$	30
Observation des temps inter-impulsion d'un signal iEMG	30
Loi de Weibull discrète	33
Choix de la masse de probabilité	35
3.2 Estimation des paramètres	35
3.2.1 Fonction objectif	35
3.2.2 Estimation hors-ligne	36
3.2.3 Cas $\beta = 1$	37
3.2.4 Estimation en ligne des paramètres	37

<b>4</b>	<b>Modélisation et estimation globales</b>	<b>41</b>
4.1	Modélisation markovienne globale	41
4.1.1	État du modèle	41
4.1.2	Modèle de Markov caché	41
4.2	Filtrage bayésien	43
4.2.1	Principe	43
4.2.2	Estimation des ondelettes par filtre de Kalman	44
4.2.3	Estimation de la variance	45
4.2.4	Probabilité <i>a posteriori</i> de la séquence des temps de séjour	45
4.3	Algorithme	46
4.3.1	Nombre de séquences	46
4.3.2	Algorithme de recherche par faisceau	47
4.3.3	Algorithme	47
4.3.4	Initialisation	48
4.3.5	Complexité	49
4.4	Adaptativité	49
<b>5</b>	<b>Estimation du nombre de sources</b>	<b>51</b>
5.1	Modèle markovien	51
5.2	Filtre bayésien	53
5.3	Algorithme général	55
<b>6</b>	<b>Signaux simulés</b>	<b>57</b>
6.1	Simulation d'un signal	57
6.2	Première étude : variation du nombre de séquences retenues $n_s$	59
6.3	Deuxième étude : variation du nombre de sources $n_{MU}$	60
6.4	Troisième étude : variation de la longueur de la fenêtre d'oubli $\ell_\infty$	64
6.5	Quatrième étude : nombre de sources non constant	65
6.6	Discussion	66
<b>7</b>	<b>Expérimentation sur des signaux iEMG</b>	<b>69</b>
7.1	Obtention des signaux iEMG	69
7.1.1	Dispositif expérimental	69
7.1.2	Prétraitements des signaux iEMG	70
7.2	Expérimentations et résultats	71
7.2.1	Estimation à sources connues et constantes	71
7.2.2	Estimation à nombre de sources inconnues et constantes	75
7.2.3	Estimation à nombre de sources inconnues et non-constantes	77
7.3	Discussion	78
	<b>Conclusion</b>	<b>81</b>
	<b>Annexes</b>	<b>83</b>
A	Preuves de la propriété 1 : chaîne de Markov	83
B	Encadrement de l'espérance d'une variable suivant une loi de Weibull discrète	84
C	Approximation de la matrice hessienne	85
D	Calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour $t_0$	86
E	Méthode d'optimisation en ligne du critère de maximum de vraisemblance	87
F	Estimation de la variance par maximum de vraisemblance	88
G	Preuve de la propriété 3 : loi <i>a posteriori</i> d'une séquence	88
H	Loi <i>a posteriori</i> d'une séquence à nombre de sources inconnues	89

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	11
<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>



# Table des figures

2.1	Exemple de signal iEMG . . . . .	20
2.2	Crochet de prothèse . . . . .	22
2.3	Mélange de deux ondelettes . . . . .	26
3.1	Schéma des processus associés à un train d'impulsions . . . . .	28
3.2	Histogramme des temps inter-impulsion d'un signal iEMG . . . . .	30
3.3	Loi géométrique - train, masse de probabilité et taux de hasard . . . . .	31
3.4	Loi binomiale négative - train, masse de probabilité et taux de hasard . . . . .	32
3.5	Loi Gamma inverse discrète - train, masse de probabilité et taux de hasard . . . . .	33
3.6	Loi de Weibull discrète - train, masse de probabilité et taux de hasard . . . . .	34
3.7	Variation de l'espérance d'une loi de Weibull discrète . . . . .	34
3.8	Estimation hors-ligne des paramètres d'une loi de Weibull discrète . . . . .	37
3.9	Estimation en ligne des paramètres d'une loi de Weibull discrète . . . . .	38
3.10	Estimé du taux de décharge d'une loi de Weibull discrète . . . . .	39
4.1	Fenêtre d'oubli . . . . .	50
6.1	Cas nominal - signal simulé . . . . .	58
6.2	Première étude - estimés du signal simulé . . . . .	59
6.3	Deuxième étude - signaux simulés . . . . .	60
6.4	Deuxième étude - estimés du signal et de la forme des ondelettes . . . . .	61
6.5	Deuxième étude - estimés des paramètres des lois de Weibull discrètes . . . . .	62
6.6	Deuxième étude - estimés des taux de décharges . . . . .	63
6.7	Troisième étude - estimés des taux de décharges suivant l'oubli . . . . .	64
6.8	Troisième étude - estimés des taux de décharges suivant l'oubli . . . . .	65
6.9	Troisième étude - estimés des paramètres des lois de Weibull discrètes . . . . .	65
6.10	Quatrième étude - estimés du signal et des trains d'impulsions . . . . .	66
6.11	Quatrième étude - estimés des ondelettes . . . . .	67
6.12	Quatrième étude - estimés des paramètres des lois de Weibull discrètes . . . . .	67
6.13	Quatrième étude - estimés des taux de décharges des lois de Weibull discrètes . . . . .	68
7.1	Montage expérimental . . . . .	70
7.2	Exemple d'acquisition . . . . .	70
7.3	Transformée de Fourier d'un signal iEMG . . . . .	71
7.4	Première expérimentation - signal iEMG filtré . . . . .	72
7.5	Première expérimentation - estimés du signal et des trains d'impulsions . . . . .	72
7.6	Première expérimentation - estimés des ondelettes . . . . .	73
7.7	Première expérimentation - estimés des taux de décharges . . . . .	73
7.8	Première expérimentation - estimés des paramètres des lois de Weibull discrètes . . . . .	74
7.9	Deuxième expérimentation - estimés du signal et des trains d'impulsions . . . . .	75
7.10	Deuxième expérimentation - estimés de la forme des ondelettes . . . . .	76

7.11	Deuxième expérimentation - estimés des taux de décharges . . . . .	76
7.12	Troisième expérimentation - signal iEMG à sources variables . . . . .	77
7.13	Troisième expérimentation - estimés du signal et des trains d'impulsions . . . . .	77
7.14	Troisième expérimentation - estimés de la forme des ondelettes . . . . .	78
7.15	Troisième expérimentation - estimés des taux de décharges . . . . .	78

# Introduction

Les travaux de thèse ont été réalisés au sein de l'IRCCyN (Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes) dans les équipes ADTSI (Analyse et Décision en Traitement du Signal et de l'Image) et Robotique. Cette collaboration a permis d'avoir une vue d'ensemble du projet : la commande d'une prothèse robotisée à partir de signaux physiologiques, les signaux électromyographiques.

## 1.1 Projet

Les travaux de thèse présentent, dans un cadre probabiliste, une méthode modélisant et estimant des informations à partir de **signaux électromyographiques (EMG)**. Ce sont des signaux électriques qui se propagent le long des fibres musculaires. Ces informations seront utilisées pour la commande d'une prothèse d'avant-bras. Cette commande ne peut pas se faire de façon directe, en reliant les signaux relevés à la prothèse car l'avant-bras humain et la prothèse ne sont pas analogues.

Trois niveaux de traitement seront nécessaires afin de réaliser la commande de la prothèse [[Stashuk 01](#), [Fougner 12](#)] :

- l'extraction de l'information contenue dans les signaux musculaires, présentée dans ce manuscrit ;
- la compréhension de l'intention de l'utilisateur à partir de l'information extraite ; la position du problème sera succinctement abordée ;
- la commande des moteurs de la prothèse, qui peut s'appuyer sur d'autres capteurs, tels que des capteurs d'effort.

Ces trois niveaux doivent être réalisés simultanément et en ligne.

Dans notre étude, une **prothèse d'avant-bras** est considérée : nous traiterons des signaux EMG provenant des muscles de l'avant-bras ou de la main. Cependant, la méthode employée pour extraire les informations peut être utilisée sur d'autres parties du corps et avec d'autres objectifs : l'étude du fonctionnement musculaire, l'étude de myopathies, l'aide dans le suivi de la rééducation fonctionnelle, *etc.*

Les signaux EMG sont modélisés comme la somme de trains d'ondelettes. Cette modélisation paramétrique va nous permettre d'en extraire des valeurs quantifiables : ce sont ces informations qui seront fournies afin de commander la prothèse.

## 1.2 Plan du manuscrit

Le manuscrit est organisé de la manière suivante :

- dans le chapitre 2, nous faisons de brefs rappels de physiologie, présentons différentes prothèses et différentes méthodes de traitement et de commande de celles-ci, et rappelons un modèle de signal EMG intramusculaire ; ce modèle fait intervenir des trains d'impulsions ;
- dans le chapitre 3, nous proposons la modélisation markovienne d'un train d'impulsions et une méthode d'estimation hors-ligne et en ligne des paramètres impliqués dans cette modélisation ;
- dans le chapitre 4, nous insérons ce modèle de train d'impulsions dans le modèle global des signaux EMG intramusculaires ; nous présentons une méthode d'estimation par filtrage bayésien, en supposant le nombre de trains d'impulsions connu ;
- dans le chapitre 5, nous donnons quelques idées pour l'estimation en ligne de ce paramètre discret ;
- les chapitres 6 et 7 présentent des expérimentations sur des signaux simulés et réels ;



## 1.3 Notations

Les notations principales utilisées dans ce manuscrit sont rappelées ci-après. Le lecteur pourra se référer à cette liste en cas de nécessité.

$n$	indice du temps discret
$t$	une variable temporelle discrète
$x[n]$	valeur de la série temporelle $x$ à l'instant $n$
$x^n$	la série temporelle $[x[1] \dots x[n]]$
$x_i$	coordonnée $i$ de $\mathbf{x}$
$X$	variable aléatoire scalaire
$x$	une réalisation de $X$
$\mathbf{X}$	variable aléatoire vectorielle
$\mathbf{x}$	une réalisation de $\mathbf{X}$
$\Pr(X = x)$	masse de probabilité de $X$ en $x$
$p_X(x)$	densité de probabilité de $X$ en $x$
$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$	densité probabilité de la variable $X_1$ en $x_1$ , conditionnellement à $X_2$ en $x_2$
$p_X^n(x)$	densité de probabilité de $X$ conditionnellement à $y^n$ ( $y$ est l'observation)
$E\{X\}$	espérance de la variable aléatoire $X$
$\hat{x}$	estimé de $x$
$n_{\text{MU}}$	nombre d'unités motrices
$\ell_{\text{RI}}$	longueur des filtres
$n_s$	nombre de séquences retenues
$t_{\text{R}}$	période réfractaire
$t_{\text{I}}$	temps d'inactivation
$y$	sortie du système, <i>i.e.</i> le signal iEMG enregistré
$w$	bruit de mesure
$v$	variance du bruit (si existante)
$I$	instant d'impulsion
$\Delta$	temps inter-impulsion
$\mathbf{U}$	concaténation des impulsions de toutes les sources, correspondant aux commandes
$\mathbf{H}$	concaténation des coefficients des filtres de toutes les sources (correspondant aux MUAP)
$\Theta$	concaténation des paramètres des lois de probabilité
$\mathbf{T}$	concaténation des temps de séjour pour toutes les sources
$\mathbf{A}$	l'ensemble des sources actives
<i>i.i.d.</i>	indépendant et identiquement distribué
EMG	électromyogramme/électromyographique
iEMG	relevant d'un signal électromyographique intramusculaire
MU	unité motrice
AP	potentiel d'action électrique parcourant une fibre musculaire (Action Potential)
MUAP	forme relevée du potentiel d'action d'un groupement de fibres musculaires (Motor Unit Action Potential)
PMF	la masse de probabilité (Probability Mass Function)
PDF	la densité de probabilité (Probability Density Function)



## Cadre et problématique de l'étude

### 2.1 Brefs rappels de physiologie

#### 2.1.1 Physiologie

Le corps humain commande ses mouvements par l'intermédiaire du système nerveux central. Ce système nerveux central regroupe le cerveau et la moelle épinière. Il envoie des ordres aux muscles par les nerfs (ou axones) sous forme de trains d'impulsions chimiques. Ces trains sont transformés en trains d'impulsions électriques au niveau de la liaison axone-fibre musculaire [Bigland 54]. Chaque impulsion électrique, qui parcourt entièrement la fibre musculaire, est appelée **potentiel d'action** (Action Potential, **AP**).

Les muscles du corps sont composés de faisceaux de fibres musculaires lents, rapides ou intermédiaires [Sharma 01]. La commande d'un muscle est réalisée par groupement de fibres, groupement appartenant entièrement à un muscle. L'ensemble {axone, groupement de fibres} est appelé **unité motrice** (Motor Unit, **MU**). Lors de l'arrivée d'une impulsion chimique sur une MU, il résulte un AP par fibre musculaire appartenant à la MU. Les MUs ne peuvent être activées en permanence : elles sont activées suivant un schéma bien précis [Peters 99] et il existe une **période réfractaire**  $t_r$  pendant laquelle aucun AP ne peut les traverser. Effectivement, le AP déclenche sur son passage une réaction chimique provoquant le mouvement local de la fibre musculaire [Wheater 01] : cette réaction chimique met un certain laps de temps avant de revenir à l'équilibre.

Chaque MU s'active à une fréquence, nommée **taux de décharge** : c'est un nombre d'impulsions par unité de temps. Ce taux de décharge peut varier dans le temps suivant des causes externes comme le temps d'effort, la force à développer ; ou interne comme le nombre de groupes de fibres musculaires actifs, le type de fibres musculaires. Ces activations successives sur une même fibre constituent un **train d'impulsions**.

Bien que la forme des APs soit constante pour une fibre musculaire particulière, des variations en amplitude et en longueur apparaissent. De plus, d'une fibre à l'autre, le diamètre influe sur l'amplitude du potentiel d'action et la vitesse de conduction sur la longueur de la réponse.

**Remarque 1.** Notons que des nerfs sensorimoteurs permettent un retour d'information vers le système nerveux central : nous sommes en présence d'un système avec rétroaction.

#### 2.1.2 Électromyogramme

Le relevé de ces signaux électriques s'appelle un **électromyogramme** (**EMG** ou **signal EMG**). A l'instar d'un électrocardiogramme (ECG) pour le muscle cardiaque, l'EMG renseigne sur l'activité du ou des

muscles étudiés. Il existe deux grands types de signal EMG.

L'**EMG de surface** (ou **sEMG**) est un relevé des signaux musculaires réalisé à la surface de la peau. Il est obtenu grâce à une paire d'électrodes de surface ou d'une matrice d'électrodes. Ces électrodes sont placées au-dessus d'un ou de plusieurs muscles. Dans le cas d'un relevé sur de grands muscles (dos, cuisses), le sEMG ne présente l'activité que d'un seul muscle. Par contre, la contribution de plusieurs muscles adjacents ou superposés est récupérée dans le cas de relevé sur des petits muscles (avant-bras, main). Dans ce dernier cas, les sEMG ne permettent pas d'avoir une idée précise de l'activation de chaque muscle. Le fait que les électrodes soient éloignées de la zone de décharge électrique ajoute une dégradation supplémentaire, le corps humain jouant le rôle d'un filtre passe-bas. De plus, les signaux enregistrés sont soumis à une grande variabilité au cours des expériences : des mouvements de peau [Hargrove 08], la sudation, le remplacement des électrodes [Research 99]. Cependant le placement des électrodes est rapide, peu coûteux et non invasif.

L'**EMG intramusculaire** (ou **iEMG**) est un relevé des signaux musculaires réalisé à l'intérieur des muscles par une électrode implantée. Les versions actuelles de ces électrodes sont souples. Ce relevé renseigne localement sur l'activation d'un muscle, sans perturbation extérieure. L'électrode aiguille est placée beaucoup plus près des fibres musculaires : les potentiels d'actions relevés sont moins filtrés par les tissus vivants et donc plus identifiables. Cependant, nous n'obtenons qu'une image locale de l'activité musculaire.

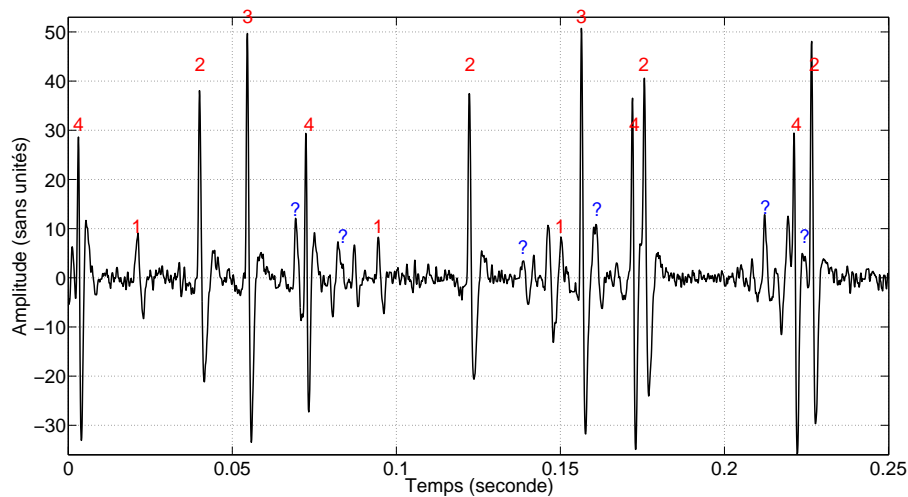


FIGURE 2.1 – Exemple de signal iEMG où apparaît au moins 4 unités motrices (identifiables par leur MUAP notée 1, 2, 3 ou 4) et des unités motrices non identifiées (notées "?"). L'affectation est faite par un expert.

Dans le cas des signaux iEMG, les relevés se présentent sous forme d'un mélange de trains d'ondelettes. *Chaque ondelette est la somme des potentiels d'action de toutes les fibres d'une unité motrice : nous appelons cette ondelette « potentiel d'action d'unité motrice » (Motor Unit Action Potential, MUAP) [Stashuk 01, Wehner 12].* Ainsi, bien que la forme des APs varie peu d'une fibre à l'autre, par le jeu de retards et atténuations différents, les MUAPs présentent des formes différentes d'une unité motrice à l'autre. Le signal iEMG se présente donc comme une succession de MUAPs avec de possibles interférences. La MUAP de chaque MU permet de l'identifier à l'intérieur du signal iEMG. Elle varie légèrement au cours du temps à cause de raisons internes et externes. Les causes internes sont un changement d'environnement chimique, la défection d'une ou plusieurs fibres de la MU, ou encore la configuration géométrique du muscle ; une cause externe est le mouvement de l'électrode par rapport à la MU.

## 2.2 Problématique de l'étude

Sur les relevés iEMG, les interférences créées par la superposition des MUAPs provenant de différentes MUs peuvent être de type destructif ou constructif. Dans ces deux cas, les interférences peuvent perturber

fortement le traitement du signal iEMG [von Tscharnier 10]. Par exemple, dans le cas destructif, le signal est perçu comme « moins énergétique » au moment de la destruction. Les interférences se produisent d'autant plus fréquemment lorsque le nombre d'unités motrices actives croît (*i.e.* un début d'effort ou un effort important).

Les méthodes couramment employées pour la commande de prothèses (voir paragraphe « Description des méthodes », section 2.3.2) ne tiennent pas compte des interférences. La reconnaissance rapide de l'intention de l'utilisateur est le principal attrait de ces méthodes. Cependant, elles ne donnent qu'une vision fonctionnelle globale (l'intention de l'utilisateur) et non pas de la commande directe des muscles (envoyé par le système nerveux central). Seules les méthodes comprenant une décomposition du signal en ses sources parviennent à restituer l'information de commande du système nerveux central.

**La méthode**, que nous présentons dans ce manuscrit, permet d'effectuer, **suivant un modèle stochastique des signaux iEMG, la déconvolution en ligne d'une somme de trains d'impulsions filtrés : elle permet d'intégrer les interférences et de fournir séquentiellement des informations en étant au plus près des commandes initiales de l'utilisateur.**

Cette méthode sera destinée **à fournir des informations en ligne dans le but de commander en ligne une prothèse d'avant-bras**. Elle aura pourtant d'autres utilisations comme le pilotage d'exosquelettes, l'aide au diagnostic, le suivi de performance, l'étude physiologique, *etc.*)

## 2.3 Utilisation des signaux dans les prothèses d'avant-bras

### 2.3.1 Les prothèses d'avant-bras

#### Des prothèses déjà existantes

Les premières prothèses d'avant-bras se composaient d'un crochet qui avait la capacité de se rétracter par une action mécanique. L'idée de la commande active de prothèse grâce au système nerveux central émane du **Pr. Norbert Wiener** [Shreyder 59]<sup>1</sup> (1947). En 1955, sous l'impulsion de travaux sur le relevé de signaux EMG [Bigland 54], l'équipe de Battye et al. [Battye 55] fabrique le premier dispositif (Figure 2.2) permettant la commande d'une prothèse à crochets à partir de signaux EMG de surface. Plusieurs problèmes technologiques et physiologiques sont ainsi soulevés après ce premier essai : la stabilité du contact entre la peau et les électrodes, l'amplification et le filtrage des signaux, la proximité des muscles, le schéma d'activation musculaire, *etc.*

Actuellement, les prothèses d'avant-bras vendues dans le commerce sont des prothèses ressemblant physiquement à un avant-bras humain. Cependant l'imitation de la fonctionnalité d'un avant-bras humain reste hors de portée : par exemple, la prothèse d'avant-bras **MichelAngelo** développée par Ottobock [Puchhammer 08]<sup>2</sup> permet d'effectuer un mouvement autour d'un seul degré de liberté à la fois. En fonctionnement automatique elle ne permet de ne commander que deux degrés de liberté. Cependant les patients peuvent régler leur prothèse suivant le type de tâches à effectuer : un bouton permet de changer de mode. Cela permet de remédier au manque de fonctionnalité de ces prothèses. Une prothèse de bras complète, la **Luke Arm**, développée au Neural Engineering Center for Artificial Limbs par T. Kuiken [Kuiken 09] [Miller 08] pour le projet militaire DARPA [Adee 08], a été conçue pour redonner le maximum de fonctionnalités à des patients amputés d'un bras complet. Le résultat est prometteur avec 8 degrés de liberté pilotables simultanément [Toledo 09]. Cependant, la mise en place de la prothèse requiert plusieurs opérations chirurgicales lourdes, opérations visant à réinnervier un muscle.

Une synthèse sur les prothèses de mains commandées par EMG peut être trouvée dans [Martin 11]. En étendant cet inventaire aux mains robotisées non destinées à la rééducation, nous pouvons citer la **Shadow**

<sup>1</sup> Le Pr. Norbert Wiener (1894-1964), célèbre diplômé de l'université de Haward (Ph.D. en 1912), est le père de la cybernétique. Il a aidé à formaliser la notion de rétroaction (feedback). Il a été élève de B. Russell et G. Hardy à Cambridge, puis de E. Landau et D. Hilbert à Göttingen. Puis, il a été professeur au Massachusetts Institute of Technology, Californie, États-Unis.

<sup>2</sup> [http://www.ottobock.com/cps/rde/xchg/ob\\_com\\_en/hs.xsl/49490.html?opentea=1](http://www.ottobock.com/cps/rde/xchg/ob_com_en/hs.xsl/49490.html?opentea=1).



FIGURE 2.2 – Crochet utilisé sur la première prothèse d'avant-bras pilotée à partir de signaux sEMG.

**Dexterous Hand** <sup>3</sup> imitant tous les degrés de liberté d'un avant-bras humain, ou encore la **SmartHand** développée à la Scuola Superiore Sant'Anna, Pise, Italie.<sup>4</sup>

En général et en particulier pour les avant-bras, les exosquelettes sont aussi un nouvel axe de recherche dans le remplacement de fonctionnalité. Les exosquelettes ne remplacent pas le membre manquant, mais viennent assister le patient dans la réalisation du mouvement pour les actes de la vie quotidienne. Un prototype d'exosquelette spécialisé pour la rééducation fonctionnelle de la main est présenté dans [Mulas 05]. Nous notons plusieurs réalisations d'exosquelettes complets, en particulier l'exosquelette **HAL-3** (Hybrid Assisted Limbed), développé par Cyberdyne.<sup>5</sup>

### Des avancées scientifiques et technologiques

Les avancées en électronique et la présence d'un grand nombre d'amputés (post-guerre) ont favorisé le développement de prothèses fonctionnelles. Les premières prothèses myoélectriques fonctionnaient grâce à une analyse de caractéristiques temporelles des signaux sEMG relevés [Englehart 98]. Le traitement du signal sEMG était basique et permettait d'activer la prothèse selon un mode prédéfini. La notion de contrôle en vitesse était parfois possible.

Les travaux menés dans de nombreux domaines ont permis une augmentation de la fonctionnalité des prothèses, leur miniaturisation et donc leur utilisation par les patients dans les activités quotidiennes. Nous notons :

- une meilleure compréhension de la physiologie : le fonctionnement du corps humain [Sharma 01], notamment la mécanique des muscles et du squelette [Hill 38, Venture 06, Sartori 13] ; les traumatismes et les pathologies associés aux muscles ; de nouvelles techniques médicales [Kuiken 09] ; la rééducation fonctionnelle [Mulas 05] ;
- des avancées dans le domaine de la robotique ; la construction d'une prothèse mécanique d'avant-bras devient possible grâce à :
  - la miniaturisation des composants mécaniques : moteurs, capteurs, muscles artificiels [Ferris 09] *etc.* ; ainsi que de nouveaux matériaux : prothèse plus légère, plus résistante et adaptable à tous les futurs utilisateurs ;

<sup>3</sup> Développée par Shadow Robot Company, Londres. <http://www.shadowrobot.com/>.

<sup>4</sup> La commercialisation est réalisée sous plusieurs noms, Azzura, Milano par l'entreprise Prensilia. <http://www.prensilia.com/>.

<sup>5</sup> <http://www.cyberdyne.jp/english/>

- l'autonomie de la prothèse, qui permet une autonomie de l'utilisateur [Cipriani 10] ;
  - la modélisation [Pau 12], la commande et l'optimisation d'un système robotique dans la cadre d'un remplacement fonctionnel d'un membre du corps humain ;
  - la résilience du système : la sécurité doit être assurée pour l'utilisateur, les personnes entourant l'utilisateur et la prothèse elle-même ;
- de nouvelles méthodes de traitement du signal grâce à de plus grandes capacités de calcul (augmentation de la rapidité des processeurs) et à une miniaturisation des composants électroniques : analyse du domaine temps-fréquence en temps réel, décomposition [Holobar 09], filtrage bayésien [Haga 13, Monsifrot 13], méthode par Monte-Carlo-Markov-Chain (MCMC) [Ge 11], ou des méthodes de parcours d'arbre [Li 13b, Monsifrot 11, Monsifrot 13] ;
  - le relevé et l'enregistrement de signaux EMG [Merletti 75, Research 99] : une meilleure compréhension des schémas d'activation des muscles et des analyses plus fines des signaux enregistrés.

### Comparaison de l'avant-bras humain et d'une prothèse d'avant-bras

L'avant-bras humain comprend 19 muscles : ils permettent de réaliser certains mouvements du poignet et les mouvements d'extension et de flexion des doigts. Aussi, 26 muscles sont présents dans la main. Les muscles de l'avant-bras et ceux de la main permettent d'actionner 22 degrés de liberté (3 rotations pour le poignet, 14 rotations autour des phalanges et 5 rotations des doigts). Ces muscles sont vus comme des actionneurs, ils produisent des couples : un couple est transformé en un mouvement ou une force suivant la configuration géométrique (limites articulaires) et dynamique (vitesse, fatigue) du bras. L'avant-bras et la main chez l'humain comportent plus d'actionneurs (45) que de degrés de libertés à commander (22) : c'est un système sur-actionné [Rengifo 10, Hamon 13]. Grâce à ce sur-actionnement, la main humaine peut réaliser des mouvements dus aux phénomènes de la coactivation [Zajac 02, Rengifo 10].

La prothèse d'avant-bras ne correspondra pas à l'avant-bras humain : le nombre d'actionneurs sera limité. Nous devons alors traduire les taux de décharges évalués par notre méthode en termes d'activation des muscles artificiels de la prothèse [Venture 06]. La technologie des muscles artificiels (à câbles ou pneumatiques) reproduira au mieux le mouvement de l'avant-bras humain grâce à des modèles de muscle [Hill 38, Chou 96]. De récents travaux par l'équipe de Tran *et al.* [Tran 10] ont permis de réaliser une activation rapide, précise et simultanée de plusieurs degrés de liberté d'un robot par imitation du geste d'un humain.

Finalement, le corps humain met environ 300ms entre la commande d'un mouvement et sa réalisation : cela correspond à la transformation de la décharge chimique en décharge électrique puis à la propagation. La prothèse devra réaliser le mouvement dans un temps voisin de 300ms pour paraître fluide à l'utilisation : analyse des signaux iEMG (réalisé dans ce manuscrit), codage en activation des informations pour les muscles artificiels et réaliser le mouvement (avec la prise en compte de paramètres externes, comme des obstacles, ou internes, comme la vitesse de contraction du muscle artificiel).

L'objectif sera de rendre le mouvement proportionné et simultané sur plusieurs degrés de liberté. Des travaux dans ce sens ont déjà été effectués [Jiang 08, Nielsen 09]

### 2.3.2 Les méthodes de traitement hors-ligne et en ligne des signaux EMG

De nombreuses méthodes ont été développées depuis la première utilisation des signaux EMG pour commander une prothèse. Deux grands types de méthodes se dégagent : les méthodes d'extraction/classification (labellisation des intentions) ; les méthodes de classification de formes de MUAPs (labellisation des commandes).

Les méthodes d'extraction/classification partagent un même schéma : une étape d'extraction de caractéristiques (temporelles ou fréquentielles), puis une étape de leur classification (reconnaissance de l'inten-



tion). En amont, une phase d'apprentissage est nécessaire : plusieurs sujets entraînent le système à reconnaître leurs intentions (« fermer la main », « tourner le poignet », *etc.*) suivant les caractéristiques extraites des signaux EMG :

- les caractéristiques extraites sont très variables : activation de seuils, « énergie » du signal [Hargrove 07], l'extraction de descripteurs temporels sur une fenêtre glissante (nombre de fois où le signal coupe l'axe des abscisses, la « longueur » du signal, la moyenne en valeur absolue, *etc.*) [Englehart 98], modélisation auto-régressive [Graupe 75], l'extraction de descripteurs temps-fréquence [Englehart 99], décomposition en ondelettes [Englehart 01, Khushaba 07], *etc.*
- les méthodes de classification sont très variables : seuillage, « k-means », analyse discriminante linéaire (LDA), réseaux de neurones [Englehart 95].

Une enquête sur ces méthodes apparaît dans [Farina 00, Parker 06]. Dans ce cas-ci, le traitement du signal EMG fait perdre toutes les informations de la commande du système nerveux central : il ne reste plus que l'interprétation de la commande. Ce type de méthode a fait ses preuves en ligne et est utilisée dans de nombreux systèmes : la main d'Ottobock Michelangelo par exemple. Cependant, de façon générale, la commande de la prothèse est une commande tout-ou-rien.

Les méthodes basées sur l'identification des formes des MUAPs et leur classification apparaissent plus tardivement : ce sont des méthodes de **déconvolution**. Elles reposent sur la labellisation des formes relevées par le signal EMG aux unités motrices en présence. Cette labellisation permet ensuite d'en déduire un taux moyen d'utilisation du muscle. Dans [Lefever 82a, Lefever 82b, Studer 84, Lesser 95], les premières méthodes de décomposition des signaux iEMG « à la main » (assistées par ordinateur) sont présentées. Plus récemment, des méthodes automatisées apparaissent [Luca 99, McGill 05, Nawab 10] avec le développement de programmes interactifs : la décomposition complète est réalisée automatiquement, puis un expert la valide. Des travaux ont été effectués afin de décomposer automatiquement le signal quasiment sans aide d'un expert : une méthode de décomposition hors-ligne par MCMC est présentée dans [Ge 08, Ge 09] ; des approches bayésiennes dans [Gut 00, Monsifrot 11, Li 13b]. L'attrait des méthodes de déconvolution est que l'information de la commande du système nerveux central est retrouvée. Cependant, les temps de calculs sont élevés en comparaison des méthodes d'extraction/classification.

**Remarque 2.** *D'autres méthodes ont été développées afin de retrouver l'intention de l'utilisateur sans recourir aux signaux EMG. Dans [Li 13a], des ultrasons émis par Doppler sont utilisés afin d'obtenir une image de la section transversale d'un muscle : après analyse elle permettra de quantifier le taux d'utilisation d'un muscle. Comme autre exemple, nous donnons les relevés d'efforts par capteurs de force sur l'exosquelette SARCOS [Guizzo 05] : il y a une amplification des mouvements de l'utilisateur.*

### Informations fournies à la prothèse

Chaque signal iEMG informe sur l'activité locale d'un muscle : il contient l'activité des MUs proche de son point de relevé. Or, l'activation de MUs dans un muscle se répartit de façon homogène dans tout le muscle. Suivant l'effort demandé (rapidité d'exécution, amplitude, *etc.*) le taux de décharge des MUs varie. Le ratio entre, le nombre de MUs en activité et leur taux de décharge, et, le nombre total de MUs qui peuvent être détectées, pourra fournir un taux moyen d'utilisation du muscle.

La méthode présentée fournit le **taux de décharge** d'un **nombre d'unités motrices** en activité d'après l'estimation des paramètres d'un modèle de signal iEMG. La traduction de ces informations quant au taux d'activation du muscle artificiel de la prothèse devra faire l'objet d'une calibration et d'un apprentissage : chaque utilisateur aura son propre schéma d'activation de muscle pour réaliser un mouvement [Matsubara 13]).



## 2.4 Modélisation du signal iEMG

### 2.4.1 Modélisation convolutive

L'enregistrement des signaux iEMG révèle le mélange de plusieurs trains d'impulsions. Dans [Stashuk 01], Stashuk remarque la propriété d'addition linéaire de plusieurs signaux électriques afin de proposer un modèle linéaire. Les trains d'ondelettes caractérisent l'activation de différents groupements de fibres. Nous considérons ici plusieurs MUs, donc plusieurs formes d'ondelette.

Nous modélisons le signal observé  $Y$  par la somme de  $n_{\text{MU}}$  trains d'impulsions  $(U_i)_{i \in \{1 \dots n_{\text{MU}}\}}$  convolués avec leur ondelette respective  $h_i$  ; l'observation est entachée d'un bruit additif [Farina 01]. Pour tout instant discret  $n$  :

$$Y[n] = \sum_{i=1}^{n_{\text{MU}}} (h_i * U_i)[n] + W[n] \quad (2.1)$$

Chaque ondelette  $h_i$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire invariant dans le temps, ce qui permet d'écrire le produit de convolution.

Nous faisons des hypothèses afin de traiter le signal  $Y$  dans un cadre probabiliste :

- les trains  $U_i$  sont des séquences binaires (0 – 1) parcimonieuses, qui représentent la commande du système nerveux central et sont de fait inaccessibles ; une modélisation stochastique sera proposée au chapitre 3 ;
- le processus  $W$  est le bruit de mesure : il est considéré comme un bruit blanc gaussien de variance constante  $v$  inconnue ;
- les séquences d'impulsions  $(U_i)_{i \in \{1 \dots n_{\text{MU}}\}}$  et la séquence du bruit  $W$  sont supposées mutuellement indépendantes ;
- la forme des ondelettes  $(h_i)_{i \in \{1 \dots n_{\text{MU}}\}}$  est inconnue. Les ondelettes sont supposées de longueur finie (de longueur maximum de  $\ell_{\text{RI}}$ ). Les coefficients des ondelettes  $h_{ij}$  sont des scalaires et se présentent sous la forme :  $h_i = [h_{i1} \dots h_{i\ell_{\text{RI}}}]^T$ .

Dans le chapitre 4, le nombre de sources  $n_{\text{MU}}$  est considéré connu et fixe, ce qui nécessite un prétraitement. Nous apporterons une solution à l'estimation du nombre de sources dans le chapitre 5. Finalement, nous discutons de la connaissance *a priori* sur la forme des ondelettes.

### 2.4.2 Forme des MUAP

**Un dictionnaire** Au paragraphe 2.1.2, nous avons vu que les ondelettes (ou MUAP) sont le résultat de la somme de plusieurs APs filtrés : chaque MUAP est unique. Lors de l'enregistrement d'un signal iEMG, deux ou plusieurs MUAPs vont pouvoir s'ajouter créant des formes inédites : ce sont des interférences. Il ne s'agit pas de les traiter comme de nouvelles ondelettes, mais bien comme la somme de plusieurs ondelettes. Pour cela, nous prenons un dictionnaire de formes *approximatives*  $\mathcal{H}$  qui seront ajustées par la procédure d'estimation proposée plus loin. Afin d'obtenir un premier dictionnaire d'ondelettes, un expert extrait ces dernières sur plusieurs signaux iEMG. Puis, le dictionnaire peut être complété lors de la mise en place et la calibration de la prothèse par le patient. Il sera complété aussi au cours de l'utilisation de la prothèse.

Nous avons créé notre propre base d'ondelettes.

**Pourquoi une réponse impulsionnelle finie ?** L'ondelette est créée par un déséquilibre chimique au niveau de la jonction axone/fibres musculaires. Quand ce déséquilibre disparaît, la charge électrique aussi. Notre hypothèse s'appuie sur le fait que la charge électrique revient à son niveau initial après un certain laps de temps et est noyée dans le bruit ambiant.

Nous noterons par  $\ell_{\text{RI}}$  la longueur de l'ondelette.

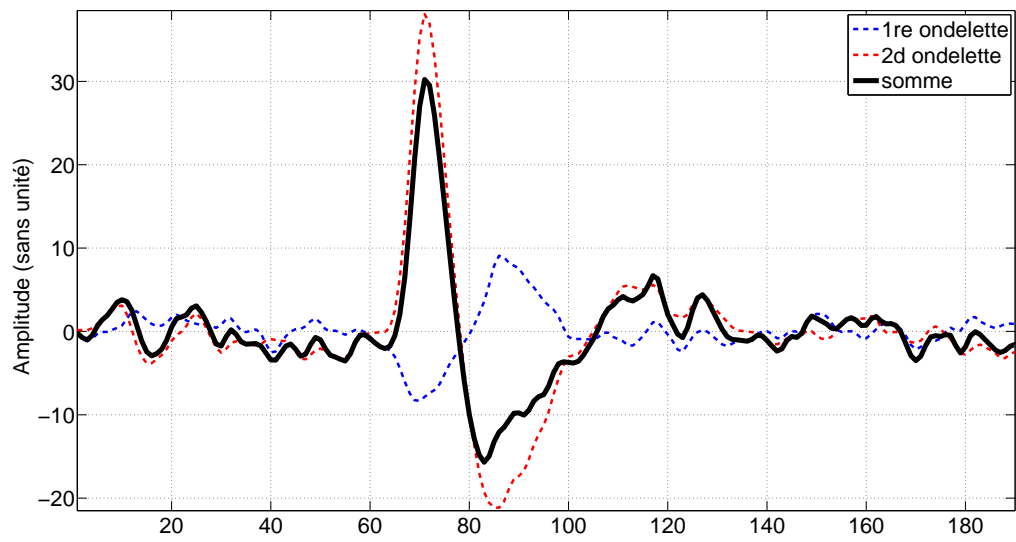


FIGURE 2.3 – Mélange de deux ondelettes

# Modélisation et estimation d'un processus impulsif

La modélisation de signaux par des trains d'impulsions convoluées apparaît dans de nombreux domaines : ondes sismiques, reconnaissance vocale, détection de fautes, communication analogique. Certains outils ont été largement étudiés et utilisés : la reconnaissance vocale se base sur de l'extraction de caractéristiques fréquentielles et temporelles ainsi que de la classification réalisée grâce à des chaînes de Markov [Baum 70, Rabiner 89, Hershey 10] ; le domaine de la communication analogique se tourne vers des algorithmes de Viterbi [Viterbi 67].

Dans ce chapitre, nous étudions la modélisation d'une séquence impulsifionnelle par un processus de renouvellement, nous réalisons l'estimation hors-ligne des paramètres du modèle et nous proposons l'algorithme d'estimation en ligne.

Dans la suite du manuscrit, les notations suivantes ont été retenues : les majuscules pour les variables aléatoires, les minuscules pour une réalisation de la variable aléatoire associée ; les lettres en trait gras sont réservées aux vecteurs et matrices, les lettres en trait fin aux scalaires.

## 3.1 Train d'impulsions

### 3.1.1 Modèle

Pour tout instant discret  $n$ , nous définissons :

- le processus d'impulsions  $U[n]$  :

$$\begin{cases} U[n] = 1 & \text{s'il y a une impulsion} \\ U[n] = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

- la séquence des instants d'impulsions  $I[N]$  avec  $N \in \mathbb{Z}$  l'indice de l'impulsion : la présence d'une impulsion à l'instant discret  $n$  est définie par le fait que  $\exists N \in \mathbb{N}$ , tel que  $S[N] = n$ , d'où

$$U[n] = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \delta[n - I[N]] \quad (3.2)$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker (nul partout sauf en 0,  $\delta[0] = 1$ ) ;

- la distance entre deux instants d'impulsions est nommée temps inter-impulsion et est notée  $\Delta$ . Le lien entre les processus  $\Delta$  et  $U$  est défini grâce au processus des instants d'impulsions  $I$  (Figure 3.1) par la relation :

$$\Delta[N] = I[N] - I[N - 1] \quad (3.3)$$

Sachant qu'il n'y a pas eu d'impulsion depuis  $I[N]$ , tout en étant à l'instant  $n$ , nous pouvons directement en déduire que :

$$\Delta[N + 1] > n - I[N]$$

Nous montrons un exemple Figure 3.1. Si nous nous plaçons en  $n = 9$  sachant que la dernière impulsion est arrivée à  $n = 8 = i[2]$ , nous déduisons que  $\delta[3] > 9 - i[2] = 9 - 8 = 1$  ;

- la séquence  $T$  du temps depuis la dernière impulsion, appelée aussi temps de séjour [Pyke 61] :

$$T[n] = \begin{cases} T[n - 1] + 1 & \text{si } U[n] = 0 \\ 0 & \text{si } U[n] = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce processus a une forme caractéristique en dents de scie (voir Figure 3.1).

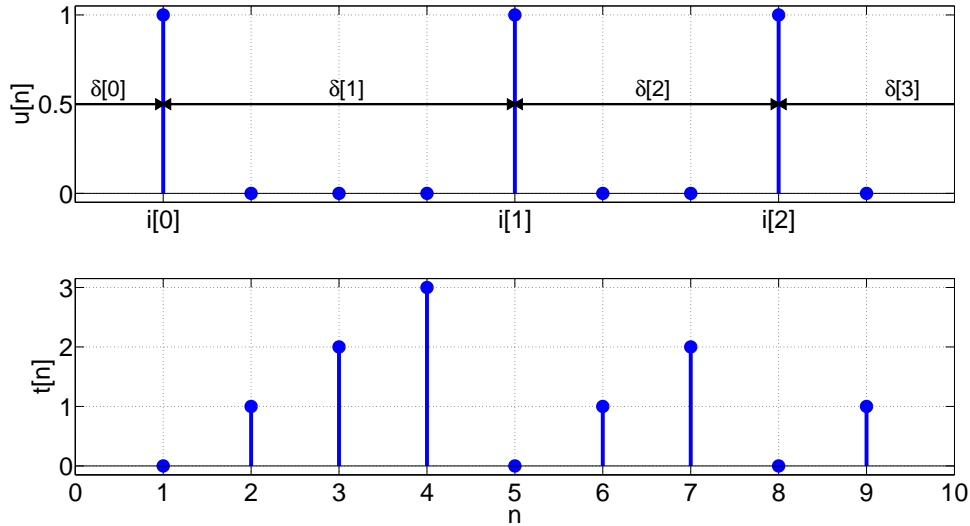


FIGURE 3.1 – Processus des instants d'impulsions  $s$ , des temps inter-impulsion  $\delta$  et séquence en dents de scie  $t$  (en bas) associés au train d'impulsions  $u$  (en haut). À l'instant  $n = 4$ , il n'y a pas eu d'impulsion depuis trois instants  $\{2, 3, 4\}$ , le temps de séjour  $t[4]$  vaut donc 3.

L'objectif est le calcul en ligne de la valeur moyenne du processus  $U$ , qui correspond au nombre d'événements moyen par unité de temps, sans retenir l'intégralité des séquences  $I^n$ ,  $\Delta^n$  et  $T^n$ , et en tirant parti d'une certaine régularité des temps inter-impulsion.<sup>1</sup> Rappelons que le taux de décharge par unité de temps représente l'activité d'une source.

### 3.1.2 Modélisation du processus inter-impulsion

Nous nous plaçons dans le cadre des processus de renouvellement [Cocozza-Thivent 97], en considérant que la séquence  $(\Delta[N])_{N \in \mathbb{Z}}$  des temps inter-impulsion est indépendante et identiquement distribuée (*i.i.d.*) : les temps inter-impulsion sont mutuellement indépendants et sont tous issus d'une loi de tirage ayant la même masse de probabilité (probability mass function, **PMF**)  $\Pr(\Delta[N] = t)$ , où  $t$  est une variable discrète.<sup>2</sup> La

<sup>1</sup> Dans la suite du manuscrit, les suites de série temporelle seront notées par l'exposant  $n$ , soit  $U^n = (U[k])_{1 \leq k \leq n}$ .

<sup>2</sup> Dans la suite du manuscrit,  $t$  représente un temps discret.

PMF caractérise la régularité entre deux instants d'impulsions (voir Figure 3.1). Nous exposerons dans la section 3.1.4 plusieurs PMF qui présentent d'intéressantes propriétés.

Un processus de renouvellement permet de modéliser l'évolution d'un système depuis un état initial donné et sa réactualisation en ce même état initial à chaque fois qu'un événement survient. Dans notre cas, le système est le processus de génération aléatoire d'impulsions et l'événement est une impulsion.

En théorie de la fiabilité [Barbu 08] (où les événements correspondent à des pannes d'appareils), il est d'usage de représenter une loi de probabilité par :

- la fonction de fiabilité  $s(t)$  (s'il y a eu un événement à l'instant 0, c'est la probabilité qu'un nouvel événement ne se soit pas produit jusqu'à l'instant discret  $t - 1$ ) :

$$s(t) = \sum_{\tau=t}^{+\infty} \Pr(\Delta[N] = \tau) \quad (3.5)$$

La fonction de fiabilité est directement reliée à la fonction de répartition  $F(t)$  par  $s(t) = 1 - F(t+1)$  ; elle décroît de 1 à 0 ;

- le taux de hasard  $r(t)$  (s'il y a eu un événement à l'instant 0, c'est la probabilité qu'un événement survienne à l'instant  $t$  sachant qu'il n'y a pas eu jusqu'à  $t - 1$ , pour tout  $t > 0$ ) :

$$r(t) = \Pr(\Delta[N] = t \mid \Delta[N] \geq t) = \frac{\Pr(\Delta[N] = t)}{s(t)} \quad (3.6)$$

il est compris entre 0 et 1, et peut être croissant ou décroissant.

### 3.1.3 Chaîne de Markov

Nous montrons que, sous l'hypothèse d'indépendance de la séquence  $(\Delta[N])_{N \in \mathbb{Z}}$ , la séquence des temps de séjour  $T$  est une chaîne de Markov : conditionnellement à la valeur actuelle du processus, les valeurs passées et futures de ce processus sont indépendantes. Toute l'information nécessaire pour prédire les valeurs futures est contenue dans la valeur présente.

**Propriété 1.** *La séquence des temps inter-impulsion  $(\Delta[N])_{N \in \mathbb{Z}}$  étant i.i.d. (de fonction de fiabilité  $s$  et taux de hasard  $r$ ), alors :*

- *Le processus  $T$  est markovien :*

$$\Pr(T[n+1] = t \mid T^n) = \Pr(T[n+1] = t \mid T[n]) \quad (3.7)$$

- *La PMF de la loi de transition s'écrit à l'aide du taux de hasard ; pour tout instant discret  $n > 0$  et toute variable  $t \geq 0$  :*

$$\Pr(T[n+1] = t \mid T[n]) = \begin{cases} r(T[n] + 1) & \text{si } t = 0 \\ 1 - r(T[n] + 1) & \text{si } t = T[n] + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

- *La distribution invariante des temps de séjour vaut, tout instant discret  $n > 0$  et toute variable  $t \geq 0$  :*

$$\Pr(T[n] = t) = \frac{s(t+1)}{E\{\Delta[N]\}} \quad (3.9)$$

où  $E\{\cdot\}$  désigne l'opérateur de l'espérance ;

- *Le nombre d'impulsions moyen de la séquence  $E\{U[n]\}$  est l'inverse de l'espérance du temps inter-impulsion  $E\{\Delta[N]\}$ .<sup>3</sup>*

La preuve est donnée en annexe A.

<sup>3</sup> Cette propriété est vraie indépendamment de la loi sur les temps inter-impulsion. Elle correspond intuitivement à l'idée que l'expression d'un taux de décharge moyen est l'inverse d'un temps moyen.

### 3.1.4 Masse de probabilité des temps inter-impulsion $\Delta$

#### Observation des temps inter-impulsion d'un signal iEMG

L'observation de signaux iEMG (voir Figure 3.2) décomposé par un expert, nous a permis de remarquer une régularité dans l'arrivée des impulsions. L'histogramme des temps inter-impulsion d'une source arrondis à la période d'échantillonnage a une forme de cloche sur le support des entiers positifs.

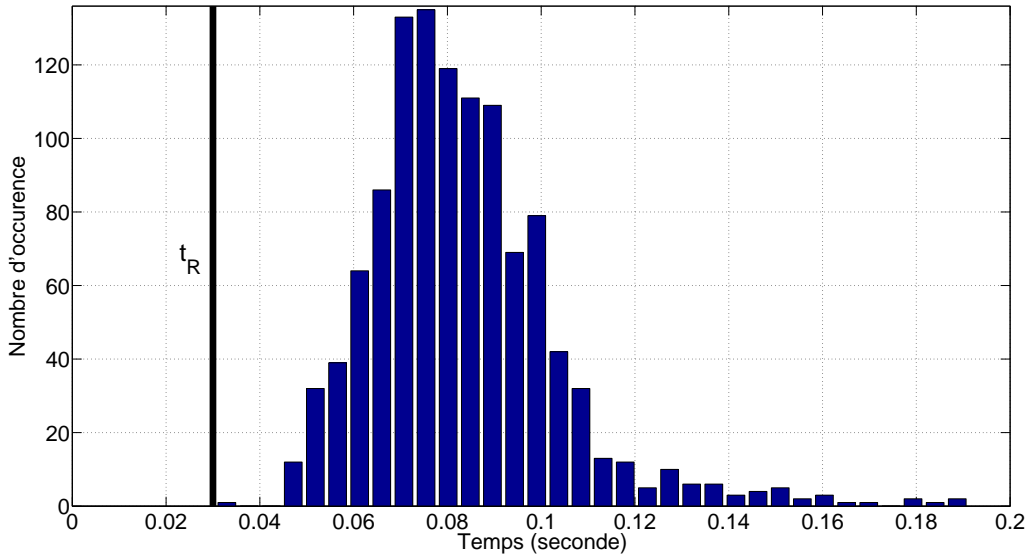


FIGURE 3.2 – Histogramme des temps inter-impulsion d'un signal iEMG décomposé par un expert

Sur la Figure 3.2, nous pouvons aussi noter la présence d'un temps réfractaire (ligne noire verticale à 0.03s), période où laquelle aucune décharge n'apparaît ; ce phénomène est connu par les physiologistes [Hampel 08] qui fournissent des valeurs pour les différents muscles [Betts 76, Kimura 78]. Ce paramètre supplémentaire est pris en compte très facilement pour chacune des lois détaillées dans la section suivante : nous remplaçons la variable  $t$  par  $t - t_R$  et la masse de probabilité n'est valide que si  $t > t_R$ .

Le choix devait prendre en compte la possibilité d'estimer en ligne les paramètres de la loi, la simplicité du taux de hasard et la simplicité de moyenne des temps d'arrivée. Rappelons que les paramètres des masses de probabilité ne sont pas connus *a priori* et que le taux de décharge (inverse de la moyenne des temps d'arrivée) nous intéresse particulièrement.

Nous présentons de façon non exhaustive différentes PMFs qui pourraient convenir pour la modélisation des temps inter-impulsion. Nous donnons pour chaque loi présentée : l'expression de la loi  $\Pr(\Delta[N] = t | \Theta)$ , du taux de hasard  $r(t, \Theta)$  et de l'espérance du processus  $E\{U[n] | \Theta\}$  ( $\Theta$  étant le lot de paramètres de la masse de probabilité), et la réalisation d'un tirage de  $U^n$  au côté de la représentation graphique de la masse de probabilité et du taux de hasard.

Comme unique exemple de loi à un paramètre, nous donnerons la loi géométrique bien connue, qui entraîne l'indépendance du train d'impulsions. Cependant, les trains impliqués dans les signaux iEMG présentent un certain caractère de régularité. Cela nous conduit à présenter des lois à deux paramètres susceptibles de prendre en compte la dispersion des valeurs : la loi binomiale négative (analogue de la loi Gamma continue), la loi Gamma inverse discrète [Hussain 12], la loi de Weibull discrète [Nakagawa 75]. Ces lois ont un paramètre de localisation et un paramètre de dispersion (comme la loi normale pour les lois continues).

**Loi géométrique** La loi géométrique de paramètre  $\Theta = [p]$  est le processus qui définit le rang  $t \geq 1$  du premier succès d'une série d'épreuves de Bernoulli de même paramètre  $p$ . Une épreuve de Bernoulli de

paramètre  $p \in [0, 1]$  représente le tirage d'un événement dont l'issue est 1 avec la probabilité  $p$  et 0 avec la probabilité  $1 - p$ . La masse de probabilité de la loi géométrique s'exprime par :

$$\Pr(\Delta[N] = t | \Theta) = p(1 - p)^{t-1}$$

Elle caractérise la répétition de  $t - 1$  épreuves avec l'issue  $\{0\}$  et une épreuve avec l'issue  $\{1\}$ . Un exemple de train d'impulsions est exposé Figure 3.3.

Le taux de hasard s'exprime par  $r(t, \Theta) = p$ . Par la construction de la masse de probabilité d'une loi géométrique, nous avons l'espérance de  $U[n]$  égale à  $p$ . Ce qui se vérifie aisément : l'espérance est de  $1/p$ , nous avons donc  $E\{U[n] | \Theta\} = p$ . Le fait que le taux de hasard et l'espérance du processus soient égaux au paramètre de l'épreuve de Bernoulli provient du fait que les tirages sont indépendants les uns des autres, donc que la connaissance d'un tirage n'influe pas sur les tirages suivants. La masse de probabilité et le taux de hasard d'une loi géométrique sont exposés Figure 3.3.

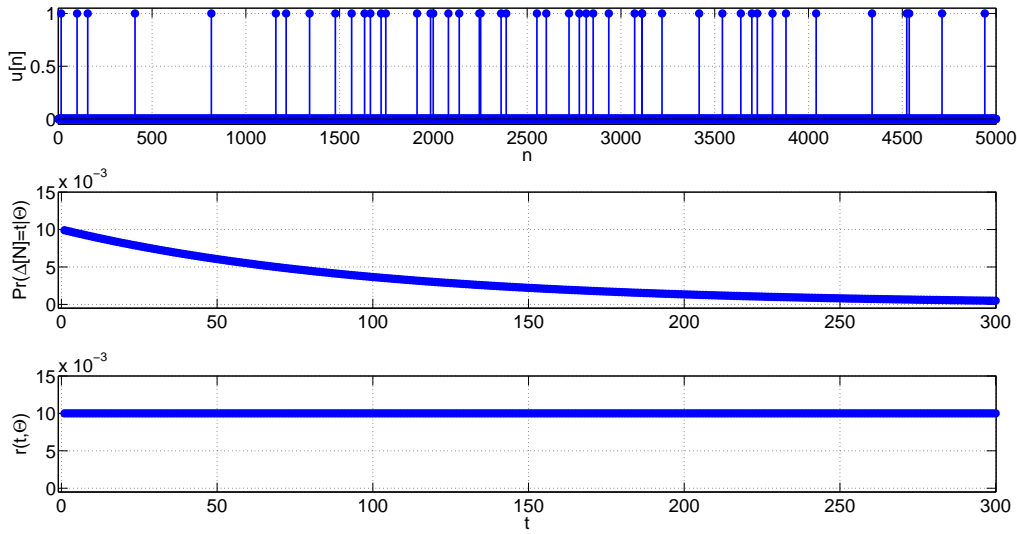


FIGURE 3.3 – De haut en bas : Un tirage de  $U^n$ , la masse de probabilité et taux de hasard d'une loi géométrique de paramètre  $p = 0.01$ .

**Loi binomiale négative** La loi binomiale négative est une généralisation de la loi géométrique. Avec ses deux paramètres  $\Theta = [k, p]$ , la PMF s'écrit, pour tout  $t \geq 0$  :

$$\Pr(\Delta[N] = t | \Theta) = \binom{t + k - 1}{t} p^k (1 - p)^t$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$  représente la probabilité qu'un événement survienne lors d'une épreuve de Bernoulli.

Le taux de hasard est donné par :

$$r(t, \Theta) = \frac{\binom{t + k - 1}{t} p^k (1 - p)^t}{1 - p^k \sum_{i=0}^{t-1} \binom{i + k - 1}{i} (1 - p)^i}$$

dont il n'existe pas de forme simple du dénominateur. Le taux de hasard tend vers  $p$  quand  $t$  tend vers l'infini.

Nous montrons la réalisation d'un processus dans le haut de la Figure 3.4.

L'espérance du processus impulsionnel est similaire à l'espérance dans le cas de la loi géométrique au facteur  $k$  près :  $E\{U[n] | \Theta\} = k(1 - p)/p$ .

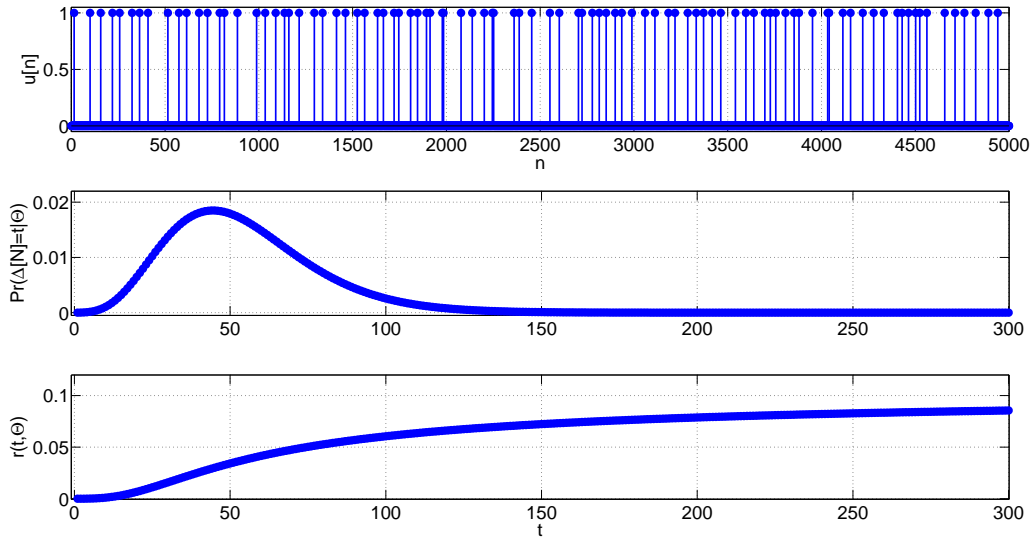


FIGURE 3.4 – De haut en bas : Un tirage de  $U^n$ , la masse de probabilité et taux de hasard d'une loi Gamma inverse discrète avec pour paramètres  $k = 6$  et  $p = 0.1$ .

**Loi Gamma inverse discrète** Avec deux paramètres  $\Theta = [\alpha, \beta]$ , la loi Gamma inverse discrète est construite sur la base de la fonction Gamma incomplète :

$$\Pr(\Delta[N] = t | \Theta) = \frac{\gamma(\alpha, \frac{\beta}{t})}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\gamma(\alpha, \frac{\beta}{t+1})}{\Gamma(\alpha)}$$

avec  $\alpha$  un paramètre de forme,  $\beta$  un paramètre d'échelle, et où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma d'Euler et  $\gamma(\alpha, \beta)$  sa forme incomplète, c'est à dire :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\gamma(\alpha, \beta) = \int_0^{\beta} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Nous donnons Figure 3.5, un exemple de processus impulsionnel.

Le taux de hasard d'une loi Gamma inverse discrète est donné par : <sup>4</sup>

$$r(t, \Theta) = 1 - \frac{\gamma(\alpha, \frac{\beta}{t+1})}{\gamma(\alpha, \frac{\beta}{t})}$$

La présence d'un maximum pour le taux hasard explique les périodes riches en impulsions, entrecoupées de zones longues sans impulsions. Ceci est parfaitement illustré sur la Figure 3.5 qui présente le tirage d'une séquence suivant une loi Gamma inverse discrète.

Il faut calculer numériquement deux intégrales afin d'obtenir la valeur du taux de hasard. *A contrario* l'expression du taux de décharge moyen est simple :

$$\mathbb{E}\{U[n] | \Theta\} = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

<sup>4</sup> Voir le calcul de la distribution invariante de  $T$  en annexe A :  $r(t) = 1 - \frac{s(t+1)}{s(t)}$



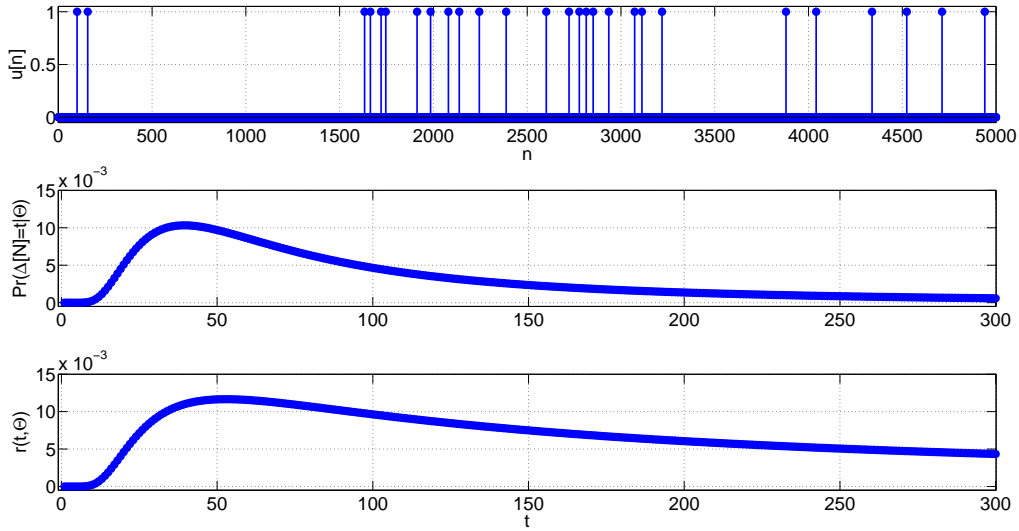


FIGURE 3.5 – De haut en bas : Un tirage de  $U^n$ , la masse de probabilité et taux de hasard d'une loi Gamma inverse discrète avec pour paramètres  $\alpha = 1.5$  et  $\beta = 100$ .

### Loi de Weibull discrète

La loi de Weibull discrète de type I à deux paramètres  $\Theta = [t_0, \beta]$  a été introduite par Nakagawa [Nakagawa 75]. Comme nous le verrons par la suite, elle possède des propriétés intéressantes. La masse de probabilité de cette loi est, pour  $t > 0$  :

$$\Pr(\Delta[N]=t|\Theta) = \exp \left[ - \left( \frac{t-1}{t_0} \right)^\beta \right] - \exp \left[ - \left( \frac{t}{t_0} \right)^\beta \right]$$

où  $t_0 > 0$  et  $\beta > 0$ .

Dans le cas où  $\beta = 1$ , nous obtenons une loi géométrique ( $p = 1 - \exp[-1/t_0]$ ). Dans le cas où  $\beta = 2$ , nous obtenons une loi de Rayleigh discrète [Roy 04].

Dans le cas limite où  $\beta$  tend vers  $+\infty$ , la distribution tend vers une distribution complètement localisée en  $t_0$ , plus précisément :

- si  $t_0 \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Pr(\Delta[N]=t|\Theta) = \begin{cases} 1 - e^{-1} & \text{si } t = t_0 \\ e^{-1} & \text{si } t = t_0 + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- si  $t_0 \notin \mathbb{N}$ , alors  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \Pr(\Delta[N]=t|\Theta) = \delta(t - 1 - \lfloor t_0 \rfloor)$  où  $\lfloor \cdot \rfloor$  est l'opérateur donnant la partie entière.

Nous en concluons que, pour  $\beta$  suffisamment grand :

- $t_0$  est un paramètre de localisation, représentatif du mode de la distribution ;
- $\beta$  est un paramètre de concentration.

Le taux de hasard d'une loi de Weibull est donné pour tout  $t \geq 1$  :

$$r(t, \Theta) = \begin{cases} 1 - \exp \left[ \left( \frac{t-1}{t_0} \right)^\beta - \left( \frac{t}{t_0} \right)^\beta \right] & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

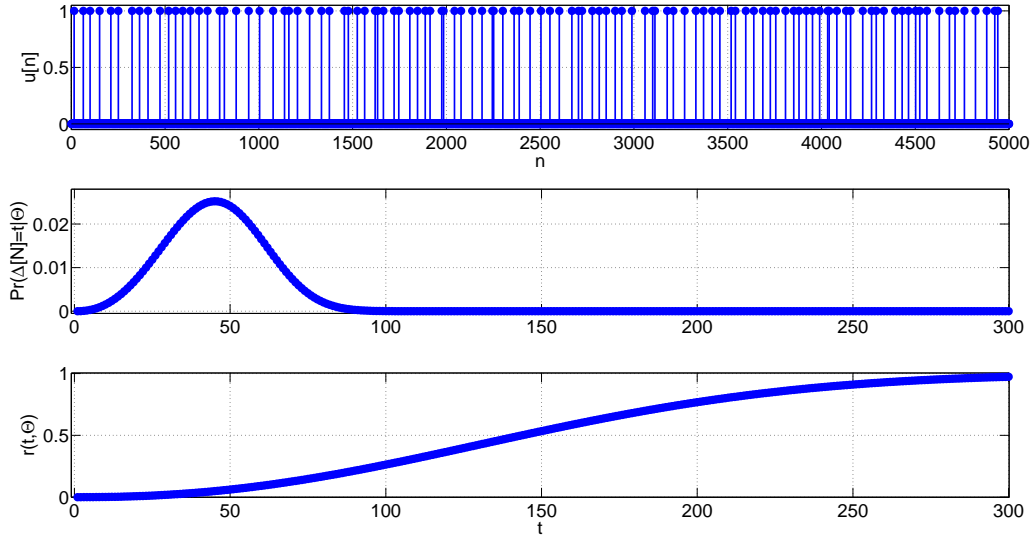


FIGURE 3.6 – De haut en bas : Un tirage de  $U^n$ , la masse de probabilité et taux de hasard d'une loi de Weibull discrète de type I avec pour paramètres  $t_0 = 50$  et  $\beta = 3.25$ .

Nous donnons Figure 3.6, la réalisation d'un processus impulsionnel, la représentation graphique d'une loi de Weibull discrète et de son taux de hasard : la forme en cloche est caractéristique pour des valeurs de  $\beta$  suffisamment grand devant 1, le taux de hasard associé étant strictement croissant dans ce cas-ci. Le taux de hasard tend vers 1 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Nous remarquons que les temps inter-impulsion sont plus réguliers que pour les lois précédemment présentées et se répartissent autour de  $t_0$ .

Le calcul de l'espérance du temps inter-impulsion n'admet pas de forme simple. Nous avons proposé un encadrement :

$$t_0 \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \leq E\{\Delta[N]|\Theta\} \leq t_0 \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) + 1 \quad (3.11)$$

Cet encadrement n'a pas été trouvé dans la littérature : nous le démontrons en annexe B. Nous traçons l'encadrement de l'espérance des temps inter-impulsion en fonction de  $\beta$ , Figure 3.7.

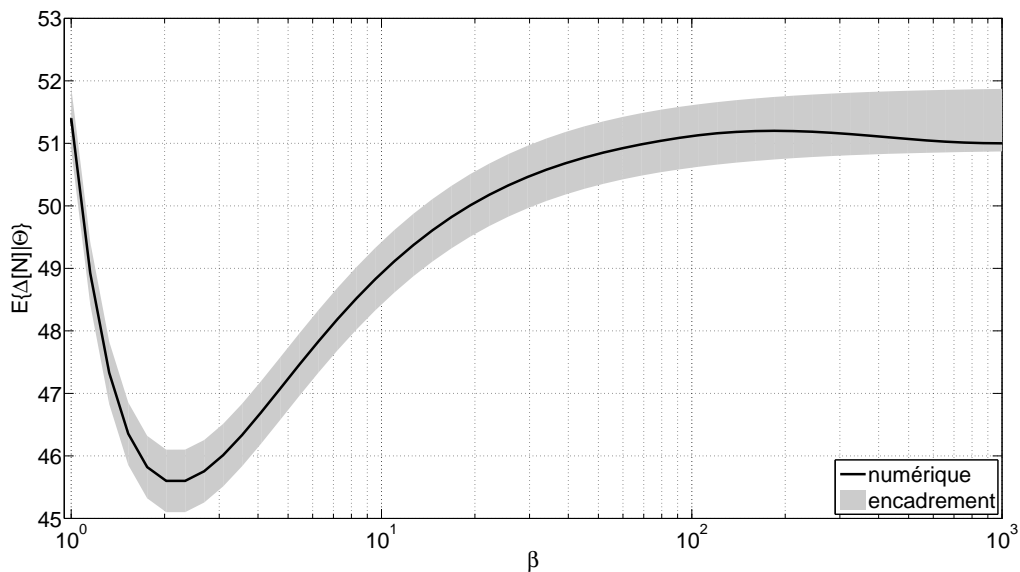


FIGURE 3.7 – Variation de  $E\{\Delta[N]|\Theta\}$  en fonction de  $\beta$  avec  $t_0 = 50.9$ .

**Remarque 3.** *L'intervalle d'incertitude autour de la valeur moyenne devient négligeable dans le cas de grandes valeurs du paramètre  $t_0$  de la loi de Weibull discrète.*

### Choix de la masse de probabilité

Notre choix s'est porté sur la loi de Weibull discrète de type-I car le taux de hasard qui intervient dans la représentation markovienne du processus de temps de séjour est simple à calculer. Nous complétons cette masse de probabilité à l'aide d'un troisième paramètre de décalage temporel  $t_R$  destiné à modéliser la période réfractaire des signaux iEMG. Dans la représentation suivante,  $t_0$  désigne toujours un paramètre de localisation et  $\beta$  un paramètre de concentration. La masse de probabilité s'écrit, pour tout  $t > t_R$  :

$$\Pr(\Delta[N]=t|\Theta) = \exp \left[ - \left( \frac{t-1-t_R}{t_0-t_R} \right)^\beta \right] - \exp \left[ - \left( \frac{t-t_R}{t_0-t_R} \right)^\beta \right]$$

Le taux de hasard s'écrit, pour tout  $t > t_R$  :

$$r(t, \Theta) = 1 - \exp \left[ \left( \frac{t-1-t_R}{t_0-t_R} \right)^\beta - \left( \frac{t-t_R}{t_0-t_R} \right)^\beta \right] \quad (3.12)$$

En effectuant un décalage d'indice de  $t_R$  instants, l'encadrement de la valeur moyenne devient :

$$(t_0 - t_R)\Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) + t_R \leq \mathbb{E}\{\Delta[N]|\Theta\} \leq (t_0 - t_R)\Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) + t_R + 1$$

## 3.2 Estimation des paramètres

Nous présentons l'estimation du vecteur paramètre  $\Theta = [t_0, \beta]$  de la loi de Weibull discrète de type I par maximisation de la vraisemblance, à partir d'une séquence  $\mathbf{t}^n$  de la séquence des temps de séjour  $\mathbf{T}^n$ . Une heuristique nous permet d'en dériver un algorithme récursif. Le paramètre  $t_R$  sera supposé connu.

Ce critère n'a pas de maximum explicite en général. Aussi nous proposons une optimisation par une méthode de Quasi-Newton. Cependant, dans le cas où  $\beta = 1$  est fixe, nous remarquons que l'estimateur de  $t_0$  a une forme explicite. Nous utiliserons cette solution pour les premiers pas de la méthode en ligne, avant de relâcher la contrainte sur  $\beta$ .

### 3.2.1 Fonction objectif

Une estimation empirique des paramètres d'une loi de Weibull discrète de type I est réalisée par la méthode des moments [Khan 89]. Dans [Kulasekera 94] une méthode est proposée : elle peut être vue comme une seule itération de l'optimisation de la vraisemblance par une méthode de Newton.

Le maximum de vraisemblance hors-ligne  $\hat{\theta}_{\mathbf{t}^n}$  s'écrit :

$$\hat{\theta}_{\mathbf{t}^n} = \arg \min_{\theta} \underbrace{-\frac{1}{n} \ln \Pr(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n | \Theta = \theta)}_{J_{\mathbf{t}^n}(\theta)}$$

$J_{\mathbf{t}^n}(\theta)$  est la fonction objectif à minimiser. En utilisant le fait que  $\mathbf{T}^n$  soit une chaîne de Markov (formule (3.7)), nous pouvons développer la fonction objectif  $J_{\mathbf{t}^n}(\theta)$ , pour tout  $n \geq 1$  :

$$J_{\mathbf{t}^n}(\theta) = -\frac{1}{n} \underbrace{\ln \Pr(\mathbf{T}[1] = \mathbf{t}[1] | \Theta = \theta)}_{-J_{\mathbf{t}^1}(\theta)} - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \underbrace{\ln \Pr(\mathbf{T}[k] = \mathbf{t}[k] | \Theta = \theta, \mathbf{T}[k-1] = \mathbf{t}[k-1])}_{-Q_{\mathbf{t}^k}(\theta)} \quad (3.13)$$

avec le terme initial  $J_{t^1}(\theta)$  obtenu grâce à la formule (3.9) et le terme  $Q_{t^k}(\theta)$  obtenu grâce à la formule (3.8). En notant  $Q'$  le gradient de  $Q$  et  $Q''$  la matrice hessienne de  $Q$ , le gradient et la matrice hessienne de la fonction objectif sont donnés par :

$$\begin{aligned} J'_{t^n}(\theta) &= \frac{1}{n} J'_{t^1}(\theta) + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n Q'_{t^k}(\theta) \\ J''_{t^n}(\theta) &= \frac{1}{n} J''_{t^1}(\theta) + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n Q''_{t^k}(\theta) \end{aligned}$$

Le calcul du gradient est direct dans le cas d'une loi de Weibull discrète.<sup>5</sup> En négligeant le premier terme de la matrice hessienne, par un raisonnement analogue à celui trouvé dans [Yi 09], la matrice hessienne est approchée par :

$$J''_{t^n}(\theta) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n [Q'_{t^k}(\theta)] [Q'_{t^k}(\theta)]^\top \quad (3.14)$$

Cette approximation est obtenue en considérant la matrice hessienne comme une approximation de la matrice d'information de Fisher de la loi de transition (annexe C). Nous notons cette approximation  $\tilde{J}''_{t^n}(\theta)$ .

### 3.2.2 Estimation hors-ligne

L'optimisation de la fonction objectif par la méthode de Quasi-Newton s'appuyant sur l'approximation (3.14) donne la récurrence suivante :

$$\hat{\theta}_{t^n}^i = \hat{\theta}_{t^n}^{i-1} - \gamma_i \left[ \tilde{J}''_{t^n} \left( \hat{\theta}_{t^n}^{i-1} \right) \right]^{-1} J'_{t^n} \left( \hat{\theta}_{t^n}^{i-1} \right) \quad (3.15)$$

À chaque étape de la récurrence, la profondeur de descente  $\gamma_i$  est initialisée à 1 et est divisée par 2 tant qu'il n'y a pas eu diminution de la fonction objectif.

Les tests en simulation, dont un exemple est présenté sur la Figure 3.8 (9 étapes pour une précision de  $10^{-4}$  sur chaque paramètre), ont confirmé le bon comportement de l'optimisation. La procédure converge rapidement avec une profondeur de descente restant naturellement à 1 (sauf près de l'initialisation).

<sup>5</sup> Les dérivées partielles de  $Q_{t^k}(\theta)$  par rapport à  $t_0$  et  $\beta$  s'expriment par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{t^k}(\theta)}{\partial t_0} &= \begin{cases} \frac{\beta}{t_0 - t_R} \frac{\left[ \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta - \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta \right]}{\left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta + \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta \right] \right)} & \text{si } t[n] = 0 \\ \frac{\beta}{t_0 - t_R} \left[ \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta - \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta \right] & \text{si } t[n] > t_R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \frac{\partial Q_{t^k}(\theta)}{\partial \beta} &= \begin{cases} \frac{\ln \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right) \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta - \ln \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right) \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta}{\left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta + \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta \right] \right)} & \text{si } t[n] = 0 \\ \ln \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right) \left( \frac{t[n-1] - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta - \ln \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right) \left( \frac{t[n-1] + 1 - t_R}{t_0 - t_R} \right)^\beta & \text{si } t[n] > t_R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Les dénominateurs, qui apparaissent lors de l'événement  $t[n] = 0$ , appartiennent à l'intervalle de valeur  $] -\infty, 0[$ .

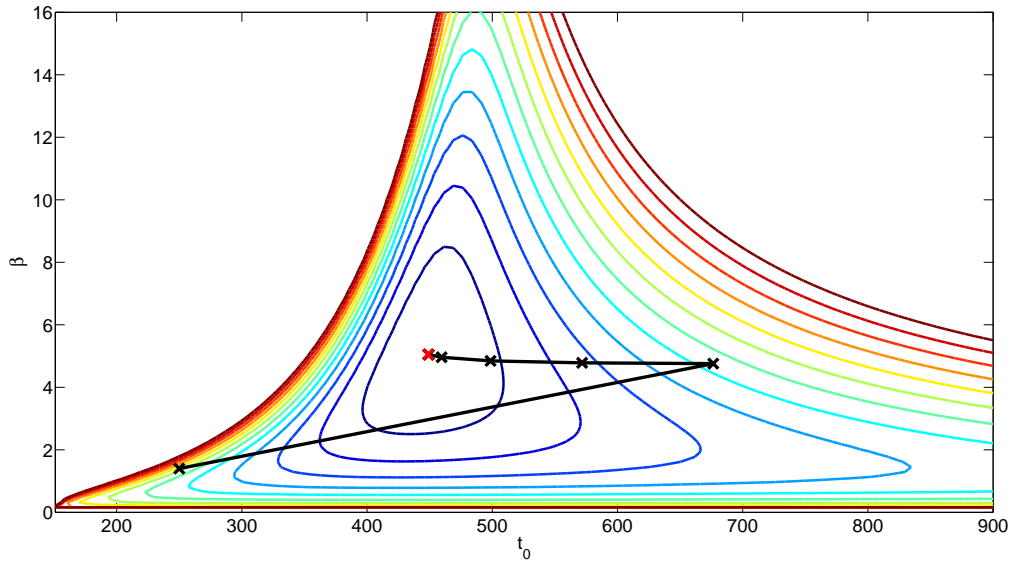


FIGURE 3.8 – Estimation des paramètres d’une loi de Weibull par Quasi-Newton avec  $t_0 = 450$ ,  $\beta = 5$  et  $t_R = 150$  : trajectoire de l’optimisation (trait noir) et courbes de niveaux.

### 3.2.3 Cas $\beta = 1$

**Propriété 2.** L’estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{t}_0$  du paramètre  $t_0$  d’une loi de Weibull discrète de type I, connaissant  $t_R$ , avec  $\beta$  fixé à 1, le temps de séjour initial  $t[1]$  étant supérieur à la période réfractaire, est donné par :

$$\hat{t}_0 = t_R + \frac{1}{\ln \frac{1}{1 - \hat{\lambda}}} \quad (3.16)$$

où, en notant  $N_0$  le nombre d’impulsions depuis l’instant initial,  $N_1$  le nombre d’instants où le temps de séjour est supérieur à  $t_R$  et  $M$  la valeur  $(t[1] - t_R)$ ,  $\hat{\lambda}$  vaut :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2t_R} \left[ - \left( 1 - \frac{N_0 t_R - 1}{N_0 + N_1 + M} \right) + \sqrt{\left( 1 - \frac{N_0 t_R - 1}{N_0 + N_1 + M} \right)^2 + 4t_R \frac{N_0 + 1}{N_0 + N_1 + M}} \right]$$

La démonstration est donnée en annexe D.

**Remarque 4.** S’il n’y a pas de période réfractaire ( $t_R$  valant 0), alors l’estimateur  $\hat{t}_0$  admet pour valeur (sans contrainte sur  $t[1]$ ) :

$$\hat{t}_0 = \frac{N_0 + 1}{N_0 + N_1 + t[1]}$$

Nous obtenons ainsi l’estimateur du maximum de vraisemblance d’une loi géométrique : il vaut le nombre d’événements ( $N_0$ ) sur le nombre total d’instants ( $N_0 + N_1 = n$ ), décalé d’une valeur initiale du temps de séjour  $t[1]$  (représentant le temps initial depuis la dernière impulsion).

### 3.2.4 Estimation en ligne des paramètres

Nous voulons maintenant estimer conjointement en ligne les paramètres  $t_0$  et  $\beta$ , Nous nous servons de l’heuristique présentée dans [Ljung 85] pour adapter la méthode de Quasi-Newton présentée dans la section 3.2.2 à un contexte en ligne. L’algorithme obtenu s’écrit :

$$\hat{\theta}_{t^n} = \hat{\theta}_{t^{n-1}} - \frac{1}{n} \mathbf{G}_{t^n}^{-1} Q'_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}}) \quad (3.17)$$

où la matrice  $\mathbf{G}_{t^n}$ , équivalant à la matrice hessienne dans la formulation hors-ligne, est donnée par la formulation récursive suivante, pour  $n \geq 2$  :

$$\mathbf{G}_{t^n} = \frac{1}{n} \left[ Q'_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}}) \right] \left[ Q'_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}}) \right]^\top + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \mathbf{G}_{t^{n-1}} \quad (3.18)$$

Cet algorithme est justifié dans l'annexe E. En pratique, cet algorithme nécessite une procédure d'initialisation. En effet,  $\beta$  est un paramètre de concentration : il ne peut être estimé que lorsqu'au moins deux valeurs sont disponibles. La première valeur correspond à un premier temps inter-événement  $\delta[1]$  (soit au moins deux événements) et la seconde valeur est le temps de séjour en cours  $t[n]$  qui fournit une information : nous n'observons pas directement la valeur du deuxième temps inter-événement  $\delta[2]$ , mais nous savons qu'elle est au moins aussi grande que le temps de séjour  $\delta[2] \geq t[n]$  : on parle de censure à droite.<sup>6</sup>

La technique proposée va être de contraindre  $\beta = 1$  et d'estimer  $t_0$  par la formule explicite (3.16) tant que deux événements ne se sont pas produits, et de relâcher la contrainte ensuite. Nous estimons  $\tilde{J}''$  par la formule (3.18) lors de cette procédure afin d'obtenir une première valeur raisonnable.

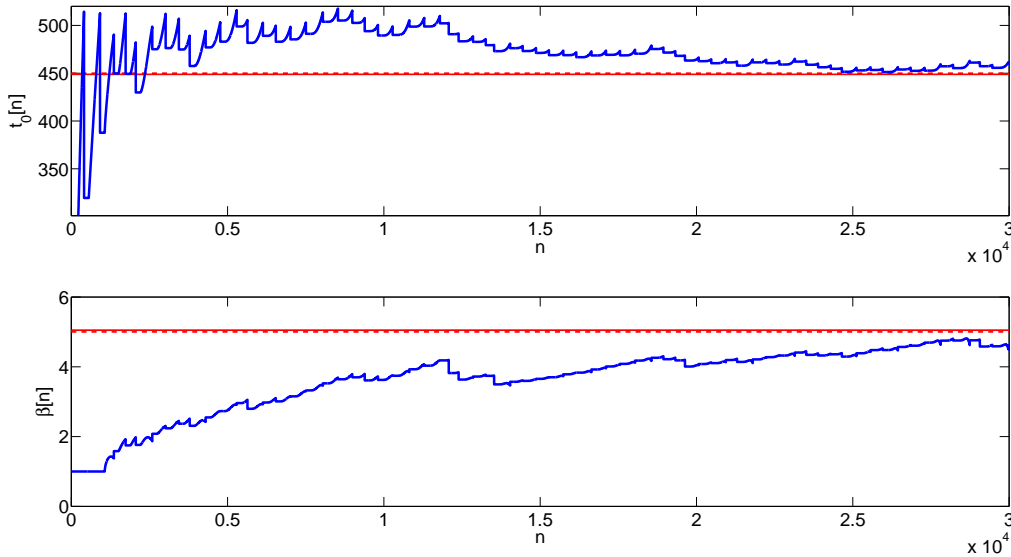


FIGURE 3.9 – Estimation séquentielle des paramètres d'une loi de Weibull avec  $t_0 = 45$ ,  $\beta = 5$  et  $t_R = 15$  : poursuites (courbes, valeurs réelles (trait pointillé) et valeurs obtenues par optimisation hors-ligne (trait plein).

Nous vérifions en simulation le bon fonctionnement de l'algorithme proposé. La Figure 3.9 montre l'estimation en ligne des paramètres  $t_0$  et  $\beta$ , et la Figure 3.10 le taux de décharge associé. Nous notons la procédure d'initialisation de la méthode, apparente sur la deuxième figure. L'estimation semble donner des résultats satisfaisants. L'évolution du taux de décharge estimé présente un profil caractéristique, qui s'explique facilement dans la mesure où l'estimation est faite à partir de données dont une (la dernière) est censurée à droite : la survenue d'une impulsion conduit en général à la mise à jour du taux de décharge vers le haut.<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Nous prenons en compte l'information que l'impulsion se produira après l'instant où nous nous trouvons.

<sup>7</sup> Au temps courant, le fait de considérer que l'impulsion arrivera dans le futur fait croître l'estimé  $\hat{t}_0$ . Lors de l'impulsion, la valeur de  $\hat{t}_0$  est revue à la baisse

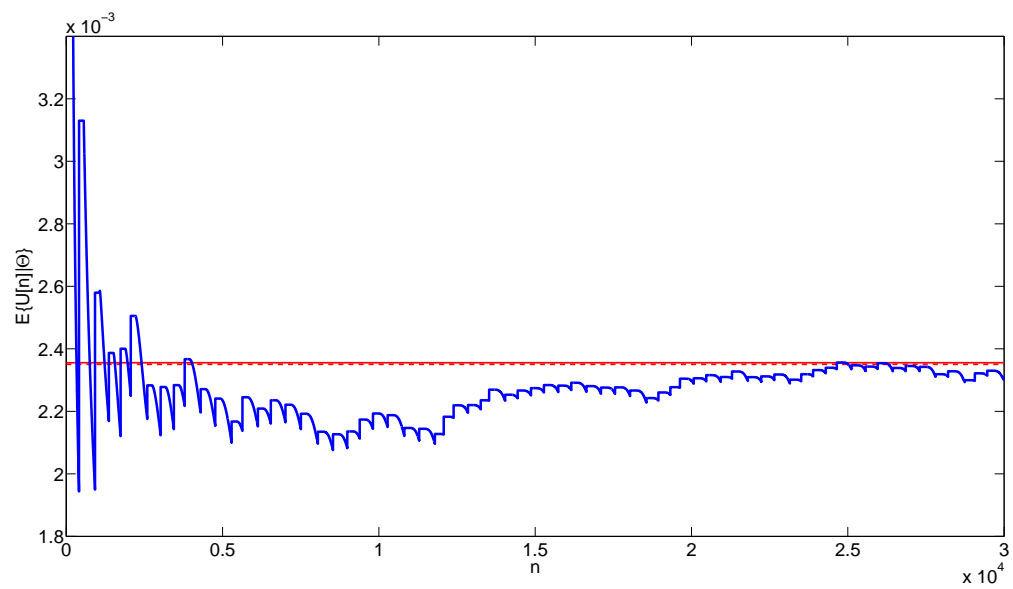


FIGURE 3.10 – Taux de décharge pour l'exemple précédent : poursuite (courbe), valeur réelle (trait pointillé) et valeurs obtenues par optimisation hors-ligne (trait plein).





## Modélisation et estimation globales

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation globale d'un signal iEMG (système multi-entrées mono-sortie) par modèle de Markov caché. Elle est fondée sur la modélisation d'un train impulsif décrit dans le chapitre 3 précédent.

En section 4.1 le modèle de Markov global qui prend en compte les formes des ondelettes est exposé ; en section 4.2 les paramètres inconnus du modèle sont estimés ; en section 4.3, nous présentons un algorithme qui sélectionne les séquences impulsives les plus probables. Les estimateurs obtenus sur les paramètres continus sont des approximations de la solution optimisant l'erreur quadratique moyenne. Finalement, l'adaptativité des paramètres du modèle est discutée section 4.4.

### 4.1 Modélisation markovienne globale

#### 4.1.1 État du modèle

Nous modélisons le système (2.1) par un modèle de Markov caché. Pour donner la représentation de Markov caché, nous présentons l'état du modèle qui comprend les paramètres représentant chacune des  $n_{\text{MU}}$  sources. Pour  $n \geq 1$  :

- $\mathbf{T}[n]$ , la concaténation des temps de séjour  $\mathbf{T}[n] = [\mathbf{T}_i[n]]_{i \in \{1 \dots n_{\text{MU}}\}}$  un vecteur colonne à valeur dans  $\mathbb{N}^{n_{\text{MU}}}$ . Il donne la connaissance du train d'impulsions  $\mathbf{U}[n]$  ;
- $\Theta$ , la concaténation en colonne des deux paramètres  $\{t_0, \beta\}$  des lois de Weibull discrètes  $\Theta_i$  des  $n_{\text{MU}}$  trains. Ce vecteur, à valeur dans  $\mathbb{R}^{2n_{\text{MU}}}$ , exprime la dynamique des sources ;
- $\mathbf{H}$ , la concaténation en colonne des coefficients qui proviennent des  $n_{\text{MU}}$  ondelettes,  $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1^\top \dots \mathbf{H}_{n_{\text{MU}}}^\top]^\top$  à valeur dans  $\mathbb{R}^{n_{\text{MU}} \ell_{\text{RI}}}$ .

#### 4.1.2 Modèle de Markov caché

Quelques hypothèses sont nécessaires pour présenter le modèle :

- le nombre de sources  $n_{\text{MU}}$  est supposé connu et fini ;
- pour chaque source, la suite des temps inter-impulsion  $\Delta_i^n$  est un processus indépendant tiré selon une loi de Weibull discrète de type I à deux paramètres  $\Theta = [t_0; \beta]$  (le paramètre de temps réfractaire  $t_{\text{R}}$  est supposé connu). Les instants d'impulsions sont **inconnus** ;

- pour chaque source, la séquence d'impulsions est convoluée par une ondelette assimilable à une réponse impulsionnelle finie dont les **coefficients**  $\mathbf{H}_i$  sont **constants et inconnus**. La longueur de l'ondelette  $\ell_{\text{RI}}$  est supposé plus courte que la période réfractaire  $t_{\text{R}}$ , ce qui simplifiera l'écriture du système sous forme markovienne ;<sup>1</sup>
- la sortie  $Y$  du système est noyée dans un bruit blanc  $W$  gaussien. La variance  $v$  du bruit  $W$  est constante et connue ;<sup>2</sup>
- les processus des temps de séjour  $T_1, \dots, T_{n_{\text{MU}}}$  et du bruit  $W$  sont considérés **mutuellement indépendants** ;
- la suite **des temps de séjour** est une **chaîne de Markov** qui suit le modèle exposé au chapitre précédent.

Le modèle de Markov caché est décrit par :

- la loi de transition de l'état :

$$\begin{cases} \Theta, \mathbf{H} \text{ constants} \\ \forall i, \Pr(T_i[n+1] | T_i[n], \Theta_i) \text{ donné par la formule (3.6)} \end{cases} \quad (4.1)$$

- la loi d'observation, équivalente au modèle (2.1) :

$$Y[n] = \underbrace{[\varphi(T_1[n]) \dots \varphi(T_{n_{\text{MU}}}[n])]}_{\psi(\mathbf{T}[n])} \mathbf{H} + W[n] \quad (4.2)$$

où  $\varphi(t)$  est un vecteur ligne de la taille de la longueur de l'ondelette  $\ell_{\text{RI}}$ . Il est rempli de zéros, excepté un 1 en position  $t + 1$  dans le cas où  $0 \leq t < \ell_{\text{RI}}$  (condition imposée par la convolution et la taille de l'ondelette) ; et  $\psi(\mathbf{T}[n])$  est la concaténation ligne des vecteurs  $[\varphi(T_i)]_{i \in \{1, \dots, n_{\text{MU}}\}}$ .

**Exemple 1.** Pour expliciter la fonction  $\varphi(t)$ , nous donnons un exemple. La longueur de l'ondelette est de  $\ell_{\text{RI}} = 5$ , alors :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] & \varphi(2) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ \varphi(5) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] & \varphi(8) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

**Exemple 2.** Pour expliciter la fonction  $\psi(\mathbf{t})$ , nous reprenons l'exemple précédent avec un nombre de sources  $n_{\text{MU}} = 2$ , alors :

$$\psi \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = [\varphi(0) \ \varphi(3)] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0].$$

Notre objectif est d'estimer l'état caché du modèle de Markov ci-dessus à partir des données observées  $Y$ . Nous présentons l'estimation de l'état en deux étapes : la première est l'estimation des paramètres à séquence impulsionnelle connue ; la deuxième est le calcul d'un estimé de l'état par le principe de la marginalisation. L'estimation des paramètres se fera, pour les paramètres des lois de Weibull, avec la méthode présentée au chapitre 3, pour la forme des ondelettes, avec un filtre de Kalman et, pour la variance du bruit, sur une heuristique fondée sur une méthode du maximum de vraisemblance.

<sup>1</sup> Dans le cas où la longueur de l'ondelette  $\ell_{\text{RI}}$  serait plus longue que la période réfractaire  $t_{\text{R}}$ , il faudrait retenir, en plus du temps de séjour, la dernière valeur du temps inter-impulsion, sans lequel la sortie ne pourrait plus être reconstruite.

<sup>2</sup> Nous adapterons plus loin le filtre au cas d'une variance inconnue

## 4.2 Filtrage bayésien

### 4.2.1 Principe

Le **filtre bayésien** nous permet de **propager dans le temps la loi *a posteriori* de l'état** du modèle de Markov caché en (4.1) et (4.2). En mettant un *prior* sur l'état initial (*i.e.* l'état initial est tiré selon une certaine loi de probabilité) et en se servant de la modélisation du système, une mise à jour de la probabilité *a posteriori* de l'état sera effectuée.

Afin de propager la probabilité *a posteriori* de l'état, nous traitons de façon séparée la partie de l'état à valeurs discrètes (les temps de séjour  $\mathbf{T}$ ) et la partie à valeurs continues (les paramètres de la loi inter-impulsion  $\Theta$ , les coefficients de l'ondelette et la variance du bruit  $H$ ). Pour tout  $n \geq 1$  :

- la densité de probabilité *a posteriori* du vecteur  $\Theta$ , paramètres des lois de Weibull discrètes, conditionnellement à la séquence des temps de séjours  $\mathbf{T}^n$ , des données mesurées  $Y^n$  et des réponses impulsionnelles est donnée par  $p_{\Theta|\mathbf{T}^n, H, Y^n}$ . Cette densité se réduit à  $p_{\Theta|\mathbf{T}^n}$  car connaissant le processus d'impulsions  $\mathbf{T}^n$ , les données mesurées et la forme des ondelettes n'apportent pas d'informations sur  $\Theta$ . De plus grâce à l'hypothèse d'indépendance sur les sources, nous pouvons écrire

$$p_{\Theta|\mathbf{T}^n} = \prod_{i=1}^{n_{\text{MU}}} p_{\Theta_i|\mathbf{T}_i^n};$$

- la densité de probabilité *a posteriori* des réponses impulsionnelles conditionnellement à la séquence des temps de séjours  $\mathbf{T}^n$  et des données mesurées  $Y^n$  est donnée par  $p_{H|\mathbf{T}^n, Y^n}$  ;
- la masse de probabilité *a posteriori* de l'ensemble de séquences aléatoires des temps de séjour  $\mathbf{T}^n$  est donné pour chaque  $\mathbf{t}^n$ , soit  $\Pr(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n | Y^n)$ .

Par la suite, nous noterons une probabilité conditionnellement à  $Y^n$  par l'exposant  $^{|n}$  : par exemple,  $\Pr(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n | Y^n)$  est noté  $\Pr^{|^n}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$ ,  $p_{H|\mathbf{T}^n, Y^n}$  est noté  $p_{H|\mathbf{T}^n}^{|^n}$ .

Les estimateurs bayésiens sont donnés (par exemple) :

- l'estimateur du maximum *a posteriori* des séquences en dents de scie, nous prenons comme estimation la séquence des temps de séjour la plus probable :

$$\hat{\mathbf{T}}^{|^n} = \arg \max_{\mathbf{t}^n} \Pr^{|^n}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \quad (4.3)$$

Les séquences d'impulsions sont traitées en une seule fois, le détail n'est pas fait selon chaque source.

- l'estimateur de l'erreur quadratique moyenne minimale pour les valeurs continues, c'est à dire l'espérance *a posteriori* :
  - en utilisant la formule de l'espérance totale sur l'ensemble des séquences des temps de séjour  $\mathbf{T}_i^n$  d'une seule source, l'estimé des paramètres d'une loi de Weibull est donné par : <sup>P1</sup>

$$\hat{\Theta}_i^{|^n} = \sum_{\mathbf{t}_i^n} \underbrace{E\{\Theta_i | \mathbf{T}_i^n = \mathbf{t}_i^n\}}_{\hat{\Theta}_{\mathbf{t}_i^n}^{|^n}} \Pr^{|^n}(\mathbf{T}_i^n = \mathbf{t}_i^n) \quad (4.4)$$

<sup>P1</sup> **Expression de l'estimateur** Suivant la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_i^{|^n} &= E^{|^n}\{\Theta_i\} \\ &= E^{|^n}\{E^{|^n}\{\Theta_i | \mathbf{T}_i^n\}\} \\ &= \sum_{\mathbf{t}_i^n} E^{|^n}\{\Theta_i | \mathbf{T}_i^n = \mathbf{t}_i^n\} \Pr^{|^n}(\mathbf{T}_i^n = \mathbf{t}_i^n) \end{aligned}$$

- en utilisant la formule de l'espérance totale sur l'ensemble des séquences des temps de séjour  $\mathbf{T}^n$  possibles, l'estimé des coefficients des ondelettes est :

$$\hat{\mathbf{H}}^{|n} = \sum_{\mathbf{t}^n} \underbrace{\mathbb{E}^{|n} \{ \mathbf{H} | \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n \}}_{\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{|n}} \Pr^{|n}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \quad (4.5)$$

Le calcul de la probabilité *a posteriori* des séquences impulsionnelles  $\Pr^{|n}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  nécessite l'expression des deux densités de probabilités  $p_{\Theta|\mathbf{T}^n}$  et  $p_{\mathbf{H}|\mathbf{T}^n}^{|n}$ . Connaissant  $\mathbf{T}^n$  et  $Y^n$ , la loi de  $\mathbf{H}$  est normale, sa moyenne et sa variance sont fournies par le filtre de Kalman (voir section 4.2.2), ce qui permet d'appliquer une méthode de marginalisation telle que dans le filtre particulaire Rao-blackwellisé [Schon 05]. La loi de  $\Theta$  connaissant  $\mathbf{T}^n$  n'est pas si simple. Nous proposons dans la section 4.2.4 une approximation destinée à n'utiliser que les estimations  $\hat{\theta}_i$  obtenues au paragraphe 3.2.4 dans le calcul la probabilité *a posteriori* des séquences impulsionnelles.

## 4.2.2 Estimation des ondelettes par filtre de Kalman

Le signal  $Y[n]$  mesuré est la somme de convolutions de processus impulsionnels  $\mathbf{U}^n$  par des ondelettes (contenues dans  $\mathbf{H}$ ) et noyé dans du bruit  $W[n]$ , qui est supposé être un bruit blanc et gaussien, de variance  $v$ . Connaissant  $\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n$ , le modèle, décrit par les équations (4.1) et (4.2), se réduit à :

$$\begin{cases} \mathbf{H} \text{ constant} \\ Y[n] = \psi(\mathbf{t}[n])\mathbf{H} + W[n] \end{cases} \quad (4.6)$$

Dans ce modèle linéaire, nous allons estimer la forme des ondelettes  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{|n}$  connaissant  $Y^n$ , la séquence des temps de séjours  $\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n$  étant fixée.

Si nous mettons un *prior* gaussien sur  $\mathbf{H}$  (*i.e.* les coefficients de  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^0}^{|0}$  sont eux-mêmes issus d'un processus suivant une loi gaussienne), le modèle devient un modèle linéaire gaussien. Suivant ces hypothèses, le meilleur estimateur linéaire au sens de la minimisation des erreurs quadratiques est le **filtre de Kalman** [Kalman 60]. C'est un filtre récursif qui est composé à chaque pas d'une opération de prédiction et d'une opération de mise à jour (ou correction). Avec le modèle (4.6) à état constant présenté ici, le filtre de Kalman se réduit à une mise à jour de l'estimation de l'état lors de l'acquisition de la nouvelle mesure.

La loi *a posteriori* de  $\mathbf{H} | \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n, Y^n$  est une loi gaussienne, de moyenne  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{|n}$  et avec une matrice de variance-covariance  $\mathbf{P}_{\mathbf{t}^n}$ , toutes deux fournies par le filtre de Kalman. Avec l'initialisation de  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{|n}$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{t}^n}$  par  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^0}^{|0}$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{t}^0}$ , la récurrence s'écrit, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{t}^n} &= \mathbf{P}_{\mathbf{t}^{n-1}} \psi(\mathbf{t}[n])^\top \nu_{\mathbf{t}^n}^{-1} \\ \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{|n} &= \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^{n-1}}^{|n-1} + \mathbf{K}_{\mathbf{t}^n} (Y[n] - \hat{Y}_{\mathbf{t}^n}^{|n-1}) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{t}^n} &= \mathbf{P}_{\mathbf{t}^{n-1}} - \mathbf{K}_{\mathbf{t}^n} \nu_{\mathbf{t}^n} \mathbf{K}_{\mathbf{t}^n}^\top \end{aligned} \quad (4.7)$$

Cette récurrence fait apparaître la loi de l'observation  $Y[n] | \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n, Y^{n-1}$ , elle-même gaussienne de moyenne  $\hat{Y}_{\mathbf{t}^n}^{|n-1}$  et de variance  $\nu_{\mathbf{t}^n}$  mises à jour pour tout  $n \geq 0$  par :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\mathbf{t}^{n+1}}^{|n} &= \psi(\mathbf{t}[n+1]) \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{|n} \\ \nu_{\mathbf{t}^{n+1}} &= \psi(\mathbf{t}[n+1]) \mathbf{P}_{\mathbf{t}^n} \psi(\mathbf{t}[n+1])^\top + v \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dans cette récurrence,  $\mathbf{K}_{\mathbf{t}^n}$  est le **gain de Kalman** qui permet de corriger l'estimation  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{|n}$  à l'instant  $n$  à l'aide de la donnée mesurée à l'instant  $n$ .  $\nu_{\mathbf{t}^n}$  est la variance de l'innovation.

**Remarque 5.** Si le bruit additif n'est pas gaussien, le filtre de Kalman reste l'implémentation d'un filtre donnant l'estimateur linéaire qui minimise l'erreur quadratique moyenne (connu sous le nom d'estimateur LMMSE, pour Linear Minimum Mean Square Error estimator). L'estimateur reste non biaisé et garde la plus petite variance parmi tous les estimateurs linéaires.

Le filtre de Kalman opère sur tous les coefficients de toutes les ondelettes : une corrélation apparaît dans le cas d'impulsions simultanées ou proches, la matrice de variance-covariance permet de faire le lien entre celles-ci. La dimension du système d'équations du filtre de Kalman est égale au nombre total de coefficients à estimer, soit  $n_{\text{MU}}\ell_{\text{RI}}$ .

### 4.2.3 Estimation de la variance

Jusqu'à présent nous avons supposé que la variance  $v$  du bruit était connue, ce qui n'est pas exact. Nous présentons une méthode qui permet de l'estimer. Une heuristique retenue est le filtrage du carré de l'estimation  $\widehat{W}_{\mathbf{t}^n}^{[n]}[n] = Y[n] - \psi(\mathbf{t}[n]) \widehat{\mathbf{H}}_{\mathbf{t}^n}^{[n]}$  du bruit  $W[n]$  pour chaque séquence  $\mathbf{t}^n$ , pour tout  $n \geq 1$  :

$$\widehat{V}_{\mathbf{t}^n}^{[n]} = \frac{1}{n} \left( \widehat{W}_{\mathbf{t}^n}^{[n]}[n] \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \widehat{V}_{\mathbf{t}^{n-1}}^{[n-1]} \quad (4.9)$$

Si le bruit  $W[n]$  était connu, la récurrence correspondrait à l'estimation en ligne de la variance par maximum de vraisemblance récursif (voir annexe F). L'estimation de la variance du bruit est :

$$\widehat{V}^{[n]} = \sum_{\mathbf{t}^n} \widehat{V}_{\mathbf{t}^n}^{[n]} \text{Pr}^{[n]}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \quad (4.10)$$

$\widehat{V}^{[n]}$  remplace  $v$  dans la formule (4.8). Cette procédure est une heuristique visant à adapter la procédure d'estimation globale à la variance du bruit additif.

### 4.2.4 Probabilité a posteriori de la séquence des temps de séjour

Il reste à calculer en ligne la probabilité des temps de séjour  $\text{Pr}^{[n]}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$ .

Pour chaque source  $i$ , les bifurcations possibles des séquences sont  $\mathbf{t}_i^{n+1} = \{\mathbf{t}_i^n, \mathbf{t}_i[n] + 1\}$  ou  $\mathbf{t}_i^{n+1} = \{\mathbf{t}_i^n, 0\}$  (dans le cas seulement où le temps de séjour est supérieur à la période réfractaire  $\mathbf{t}_i[n] > t_{\text{R}}$ ). Nous obtenons un nombre de bifurcations compris entre 1 et 2 pour chaque source : le nombre total de séquences filles est compris entre 1 et  $2^{n_{\text{MU}}}$  pour l'ensemble des sources d'une séquence mère.

**Propriété 3.** Soit  $Y^n$  une séquence de données mesurées et modélisée suivant le modèle de Markov caché décrit en (4.1) et (4.2). La probabilité a posteriori de l'état s'obtient dans un schéma récursif, initialisé par le prior  $\text{Pr}(\mathbf{T}^1 = \mathbf{t}^1 | Y^0)$ . Pour tout instant discret  $n \geq 1$  et toutes les bifurcations possibles  $\mathbf{t}^{n+1}$  issues de  $\mathbf{t}^n$  :

$$\textbf{Mise à jour} : \text{Pr}^{[n]}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \propto \text{Pr}^{[n-1]}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) g(Y[n] - \widehat{Y}_{\mathbf{t}^n}^{[n-1]}, \nu_{\mathbf{t}^n}) \quad (4.11)$$

$$\textbf{Prédiction} : \text{Pr}^{[n]}(\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{t}^{n+1}) = \text{Pr}^{[n]}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \times \prod_{i=1}^{n_{\text{MU}}} \begin{cases} \mathbb{E}\{r(\mathbf{t}_i[n] + 1, \boldsymbol{\Theta}_i) | \mathbf{T}_i^n = \mathbf{t}_i^n\} & \text{si } \mathbf{t}_i[n+1] = 0 \\ 1 - \mathbb{E}\{r(\mathbf{t}_i[n] + 1, \boldsymbol{\Theta}_i) | \mathbf{T}_i^n = \mathbf{t}_i^n\} & \text{si } \mathbf{t}_i[n+1] = \mathbf{t}_i[n] + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $g(\cdot, \nu_{\mathbf{t}^n})$  désigne la valeur de la gaussienne de variance  $\nu_{\mathbf{t}^n}$ ,  $r(\mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})$  le taux de hasard de la loi inter-impulsion considérée et  $\mathbb{E}\{r(\mathbf{t}_i[n] + 1, \boldsymbol{\Theta}_i) | \mathbf{T}_i^n = \mathbf{t}_i^n\}$  est l'espérance du taux de hasard conditionnellement à la séquence  $\mathbf{T}_i^n$ .

Cette propriété est démontrée en annexe G.

L'espérance du taux de hasard s'exprime par :

$$E\{r(t_i[n] + 1, \Theta_i) | T_i^n = t_i^n\} = \int r(t_i[n] + 1, \theta) p_{\Theta_i | T_i^n}(\theta, t_i^n) d\theta$$

Nous n'avons pas trouvé de loi *a priori* pour exprimer la loi de densité  $p_{\Theta_i | T_i^n}$  dans le cas où les temps inter-impulsion sont régis par une loi de Weibull discrète, et permettant un calcul effectif de cette intégrale.

Nous proposons de linéariser le taux de hasard  $\theta \mapsto r(t, \theta)$  autour de  $E\{\Theta_i | T_i^n = t_i^n\}$ , conduisant à :

$$E\{r(t, \Theta_i) | T_i^n = t_i^n\} \approx r(t, \underbrace{E\{\Theta_i | T_i^n = t_i^n\}}_{\hat{\theta}_{t_i^n}}) \quad (4.13)$$

Puis nous proposons de remplacer le calcul de l'espérance du maximum *a posteriori* par l'estimateur du maximum de vraisemblance développé à la section 3.2.4.

Nous obtenons alors une forme approchée de la probabilité *a posteriori* de l'état ; la formule (4.12) devient :

$$\Pr^n(\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{t}^{n+1}) \approx \Pr^n(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \prod_{i=1}^{n_{\text{MU}}} \begin{cases} r(t_i[n] + 1, \hat{\theta}_{t_i^n}) & \text{si } t_i[n + 1] = 0 \\ 1 - r(t_i[n] + 1, \hat{\theta}_{t_i^n}) & \text{si } t_i[n + 1] = t_i[n] + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.14)$$

## 4.3 Algorithme

Nous présentons un algorithme de déconvolution en ligne : une discussion portant sur le nombre de séquences est menée ; un algorithme de parcours de séquences est détaillé (l'algorithme de recherche par faisceau) ; finalement, l'algorithme d'estimation globale est donné et accompagné d'une discussion sur son initialisation et sa complexité.

### 4.3.1 Nombre de séquences

Plaçons-nous dans le cas où nous n'aurions qu'une seule source. Si nous gardions toutes les séquences possibles jusqu'à un instant  $n$ , alors le nombre de séquences  $n_t[n]$  suivrait une suite de Fibonacci de rang  $t_R$ . Nous avons pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{cases} n_t[n + 1] = n_t[n] + n_t[n - t_R] & \text{pour } n > t_R \\ n_t[n] = 1 & \text{pour } n \leq t_R \end{cases} \quad (4.15)$$

La suite  $N_t$  est géométrique. Le nombre de séquences  $N_t[n]$  croît de façon exponentielle. Ainsi, le nombre de séquences possibles va croître d'autant plus vite que le nombre de sources va être important.

Nous ne pouvons pas explorer physiquement l'ensemble des possibilités de  $\mathbf{T}^n$  (même dans le cas d'une seule source). Nous limitons le nombre d'états (*i.e.* de séquences) retenus à chaque pas de l'algorithme.

Dans notre schéma de proposition (bifurcations) et de mise à jour (calcul des probabilités *a posteriori* grâce à la vraisemblance), les séquences sont explorées avec un algorithme de recherche par faisceau (dont l'algorithme 1 illustre la recherche sur un train d'impulsions, section 4.3.2). Pour cela, nous choisissons les séquences proposées les plus probables et nous en choisissons  $n_s$  (qui est un paramètre de la méthode). Ce nombre est analogue au nombre de particules dans un filtre particulaire. Le nombre de bifurcations proposées sera au maximum de  $2^{n_{\text{MU}}} n_s$  et le nombre maximal de séquences sélectionnées sera de  $n_s$ .

### 4.3.2 Algorithme de recherche par faisceau

L'algorithme de recherche par faisceau rentre dans la classe des algorithmes de parcours d'arbres en programmation dynamique [Furey 05]. L'heuristique proposée permet de sélectionner à chaque instant les meilleurs  $n_s$  états suivant une métrique (ou score) et d'en oublier les autres. L'algorithme continuera uniquement le parcours sur les fils des  $n_s$  états sélectionnés : il utilise une stratégie de parcours en largeur (Bread-First Search, BFS) pour visiter tous les fils. Le nom de l'algorithme vient de la largeur du faisceau, nombre de séquences retenues à chaque étape.

Par rapport à l'**algorithme de Viterbi** [Viterbi 67], cet algorithme est **sous-optimal** puisqu'il ne visite pas toutes les séquences existantes : seules les séquences filles issues des  $n_s$  séquences retenues participeront à la prochaine étape.

La recherche du meilleur train d'impulsions est donnée par l'algorithme de recherche par faisceau (algorithme 1) où la métrique utilisée est la probabilité *a posteriori*.

---

**Algorithme 1:** Proposition des meilleurs trains d'impulsions pour une source

---

```

pour  $n = 1$  faire
  | Initialiser la métrique pour chacun des  $\mathbf{t}[1]$  des  $n_s$  séquences initiales
fin
pour  $n \geq 1$  faire
  | Garder les  $n_s$  séquences  $\mathbf{t}^n$  les plus probables
  | pour toutes les  $\mathbf{t}^n$  retenues faire
  |   | pour toutes les bifurcations possibles  $\mathbf{t}^{n+1}$  faire
  |   |   | Calculer la métrique pour chacune des séquences  $\mathbf{t}^{n+1}$ 
  |   |   fin
  |   fin
  fin
fin

```

---

### 4.3.3 Algorithme

Le principe de l'algorithme d'estimation globale (l'algorithme 2) est le suivant :

- proposition de toutes les bifurcations possibles à partir des  $n_s$  séquences retenues à l'étape précédente ;
- mise à jour pour chaque séquence proposée de la probabilité *a priori* de la séquence (grâce la formule (4.14)), de la sortie reconstruite  $\hat{Y}_{\mathbf{t}^{n+1}}^n$  et, pour chaque source, mise à jour des paramètres  $\hat{\Theta}_i = [\hat{t}_{0,i}, \hat{\beta}_i]$  associés à la loi de Weibull discrète (formules (3.17) et (3.18)) ;
- enregistrement de la nouvelle donnée ;
- mise à jour des coefficients des ondelettes par le filtre de Kalman (4.7) et (4.8), de la variance  $\hat{V}^n$  du bruit (grâce à la formule (4.10)) ;
- calcul pour chaque séquence proposée, de la probabilité *a posteriori* (grâce à la formule (4.11)),
- choix des  $n_s$  séquences les plus probables,
- retour au début du schéma.



---

**Algorithme 2:** Estimation des impulsions, des paramètres des lois de Weibull discrètes, des ondelettes et de la variance du bruit.

---

```

Initialiser  $\hat{H}_{\mathbf{t}^0}^{[0]}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{t}^0}$ ,  $\hat{V}_{\mathbf{t}^0}^{[0]}$  (voir paragraphe 4.3.4) avec  $\mathbf{t}^0$  une matrice vide
pour toutes les séquences  $\mathbf{t}[1]$  initiales faire
    Initialiser  $\text{Pr}^{[0]}(\mathbf{T}[1] = \mathbf{t}[1])$  et  $\hat{\theta}_{\mathbf{t}_i[1]}$ ,  $\mathbf{G}_{\mathbf{t}_i[1]}$  de chaque source  $i$ 
    Prédire  $\hat{Y}_{\mathbf{t}^1}^{[0]}$  et calculer  $\nu_{\mathbf{t}^1}$  avec la formule (4.8)
fin
pour  $n \geq 1$  faire
    nouvelle donnée  $Y[n]$  mesurée
    pour les  $\mathbf{t}^n$  retenues faire
        Calcul de la probabilité a posteriori  $\text{Pr}^{[n]}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  avec la formule (4.11)
    fin
    Sélectionner et garder les  $n_s$  séquences les plus probables
    pour les séquences  $\mathbf{t}^n$  faire
        Mettre à jour  $\hat{H}_{\mathbf{t}^n}^{[n]}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{t}^n}$  avec la formule (4.7)
        Mettre à jour  $\hat{V}_{\mathbf{t}^n}^{[n]}$  avec la formule (4.9)
    fin
    Calculer les estimés  $\hat{\Theta}^{[n]}$ ,  $\hat{H}^{[n]}$  et  $\hat{V}^{[n]}$  avec les formules (4.4), (4.5) et (4.10)
    pour les  $\mathbf{t}^n$  retenues faire
        pour toutes bifurcations  $\mathbf{t}^{n+1}$  possibles venant de  $\mathbf{t}^n$  faire
            Calculer  $\text{Pr}^{[n]}(\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{t}^{n+1})$  avec la formule (4.14)
            pour chaque source  $i$  de  $\mathbf{t}^{n+1}$  faire
                Calculer  $\hat{\theta}_{\mathbf{t}_i^{n+1}}$  et  $\mathbf{G}_{\mathbf{t}_i^{n+1}}$  avec les formules (3.17) et (3.18)
            fin
            Prédire  $\hat{Y}_{\mathbf{t}^{n+1}}^{[n]}$  et calculer  $\nu_{\mathbf{t}^{n+1}}$  avec la formule (4.8)
        fin
    fin
fin

```

---

**Remarque 6.** Il est à noter que cet algorithme permet d'extraire une séquence  $\hat{\mathbf{t}}^{n|n}$  avec le maximum de probabilité *a posteriori* en chaque instant  $n$  grâce à la formule (4.3). Cependant, cette séquence n'est absolument pas nécessaire au bon fonctionnement de l'algorithme i.e. nous n'avons pas besoin de stocker les suites des séquences. Chaque séquence retenue est associée à un état qui contient ses propres estimés des paramètres des lois de Weibull discrètes et des coefficients des ondelettes. La déconvolution se poursuit avec les séquences ayant les plus grandes probabilités *a posteriori*.

Chaque source est codée par son ondelette et un taux de mise à feu moyen lui est associé :

$$\mathbb{E}\{U_i[n] | \Theta = \hat{\theta}_{\mathbf{t}^n}\} \approx \frac{1}{(\hat{t}_{0i,\mathbf{t}^n} - t_R) \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\hat{\beta}_{i,\mathbf{t}^n}} \right) + t_R}$$

### 4.3.4 Initialisation

La valeur de  $t_R$  est choisie d'après des données physiologiques : en général  $t_R = 30\text{ms}$  pour des muscles de l'avant-bras.

Les valeurs initiales des temps de séjour  $\mathbf{t}_i[1]$  pour chaque source  $i$  sont tirées suivant une loi uniforme discrète entre  $t_R + 1$  et  $3t_R$ . Toutes les séquences ont le même poids initial  $\text{Pr}^{[0]}(\mathbf{T}[1] = \mathbf{t}[1]) = 1/n_s$ .



Pour chaque source, les initialisations de  $t_0$ ,  $\beta$  et  $\mathbf{G}_{t[1]}$  sont réalisées en suivant le schéma proposé en section 3.2.4.

Il reste l'initialisation de l'ondelette et la variance du bruit. Une estimation grossière de l'ondelette est réalisée pour déterminer les valeurs initiales des coefficients des ondelettes  $\hat{\mathbf{H}}_{t_0}^{[0]}$  (nous choisirons  $\mathbf{P}_{t_0}$  comme une matrice diagonale dont les termes diagonaux valent 10% de la valeur de chaque coefficient de l'ondelette initiale). La valeur de la variance du bruit est cruciale car elle permet de distinguer le signal utile du bruit de fond.  $\hat{\mathbf{V}}_{t_0}^{[0]}$  est estimée au début du signal sur une zone de non-activité.

### 4.3.5 Complexité

La complexité de calcul de mise à jour des paramètres des lois de Weibull discrètes est linéaire avec le nombre de séquences retenues  $n_s$  et exponentielle avec le nombre de sources en présence (au maximum  $2^{n_{\text{MU}}}$  séquences filles) : la complexité est en  $\mathcal{O}(n_s 2^{n_{\text{MU}}})$ .

La complexité de cet algorithme est alors donnée par la complexité de calcul de la mise à jour de la matrice de variance-covariance  $\mathbf{P}_{t^n}$  : elle nécessite le produit d'un vecteur colonne par son transposé (le gain de Kalman est lui-même obtenu après la multiplication d'un vecteur par une matrice) et ceci pour chacune des  $n_s$  séquences retenue. Comme évoqué en sous-section 4.2.2, le gain de Kalman est un vecteur colonne de taille  $n_{\text{MU}} \ell_{\text{RI}}$ . La complexité est en  $\mathcal{O}(n_s (n_{\text{MU}} \ell_{\text{RI}})^2)$ .

La complexité de calcul dépendra alors de la valeur de  $(n_{\text{MU}} \ell_{\text{RI}})^2$  ou de  $2^{n_{\text{MU}}}$ . Nous nous plaçons dans le cas où, la longueur des réponses impulsionnelles  $\ell_{\text{RI}}$  est grande devant  $2^{n_{\text{MU}}}$ . Le temps de calcul dépend alors de façon quadratique de la longueur  $\ell_{\text{RI}}$  des ondelettes. Un compromis devra être trouvé entre une représentation précise des ondelettes (haute fréquence d'échantillonnage qui permettra de différencier les ondelettes) et un temps de calcul non-prohibitif (faible fréquence d'échantillonnage). Le temps de calcul dépend aussi de façon quadratique du nombre de sources  $n_{\text{MU}}$  : une astuce consisterait à ne plus utiliser un filtre de Kalman exact, mais une version dégradée, le filtre de Kalman d'ensemble [Evensen 03]. Ce type de filtre est fait pour les estimations avec de grands états.

## 4.4 Adaptativité

Pour chacune des trois estimations présentées en sous-sections 3.2.4, 4.2.2 et 4.2.3, le modèle prend en compte des valeurs constantes pour les paramètres. Cependant, lors du chapitre 7 dédié aux expériences sur des signaux iEMG, nous verrons que ces valeurs peuvent varier au cours du temps. Ces variations ne sont pas prises en compte par le modèle. Dans ce cas, les méthodes présentées ne poursuivraient plus correctement les valeurs des paramètres.

Nous proposons de rendre les estimateurs adaptatifs en utilisant une technique de facteur d'oubli introduite dans [Ljung 83]. Nous remplaçons le terme  $1/n$  dans les différentes formules par  $1/\ell[n]$ , où  $\ell[n]$  sera un paramètre de réglage de l'apprentissage. Ce réglage va correspondre à la taille de la fenêtre glissante : elle grandira depuis  $\ell[1]$  (par exemple  $\ell[1] = 1$ ) jusqu'à  $\ell_\infty$  :

$$\ell[n+1] = \left(1 - \frac{1}{\ell_\infty}\right) \ell[n] + 1$$

La fenêtre glissante équivaut à un oubli avec une décroissance exponentielle de valeur  $1 - 1/\ell_\infty$  ( $< 1$  car  $\ell_\infty > 1$ ) et un apprentissage de valeur  $1/\ell_\infty$ . Pour se ramener au cas d'une fenêtre infinie (*i.e.* pas de réglage,  $\ell[n] = n$ ), il suffit de poser  $\ell_\infty = +\infty$ .

Ainsi, nous introduisons une variation dans les formules d'estimation :

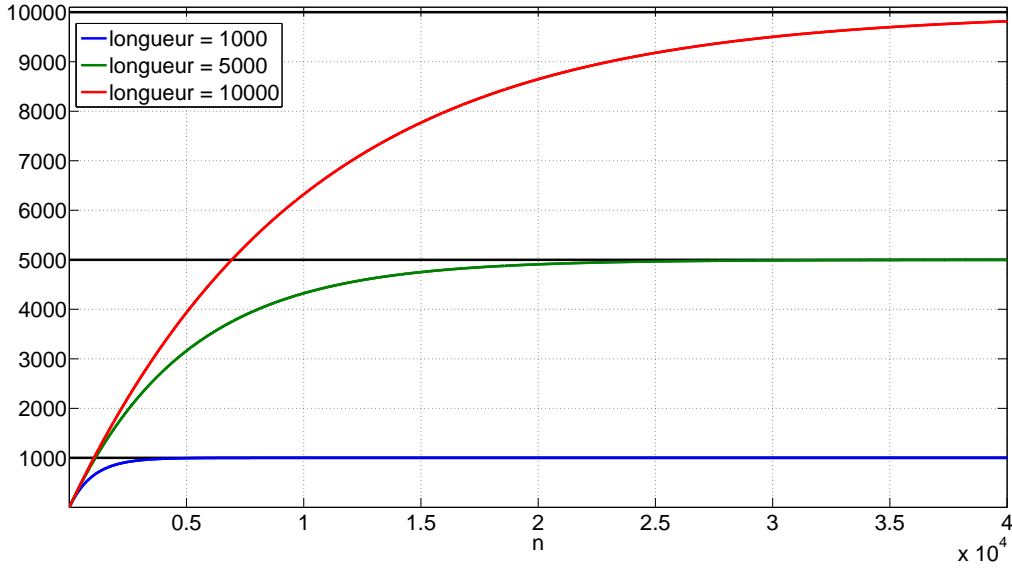


FIGURE 4.1 – Taille de la fenêtre au cours du temps pour plusieurs valeurs d'oubli.

- des paramètres de la loi de Weibull discrète des formules (3.17) et (3.18) :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{t^n} &= \hat{\theta}_{t^{n-1}} - \frac{1}{\ell[n]} \mathbf{G}_{t^n}^{-1} \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}})}{\partial \theta} \\ \mathbf{G}_{t^n} &= \frac{1}{\ell[n]} \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}})}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}})}{\partial \theta} \right]^\top + \left( 1 - \frac{1}{\ell[n]} \right) \mathbf{G}_{t^{n-1}} \end{cases} \quad (4.16)$$

- de la forme des ondelettes (4.7) et (4.8) : dans le modèle considéré, il n'y a pas de bruit sur les réponses impulsionnelles. Un choix pourrait être de mettre une marche au hasard sur cette donnée. Pour éviter d'ajouter de nouveaux paramètres de réglages, nous utiliserons un gonflage artificiel de la matrice de variance-covariance [Xia 94] : nous augmentons artificiellement l'erreur sur l'innovation. La matrice de variance-covariance de la formule (4.7) change alors en :

$$\mathbf{P}_{t^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\ell_\infty}} \left( \mathbf{P}_{t^{n-1}} - \mathbf{K}_{t^n} \nu_{t^n} \mathbf{K}_{t^n}^\top \right) \quad (4.17)$$

- de la variance du bruit (4.9), pour tout  $n \geq 1$  :

$$\hat{V}_{t^n}^{[n]} = \frac{1}{\ell[n]} \left( Y[n] - \psi_{t[n]} \hat{\mathbf{H}}_{t^n}^{[n]} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{\ell[n]} \right) \hat{V}_{t^{n-1}}^{[n-1]} \quad (4.18)$$

Le réglage de cette fenêtre peut être multiple suivant le but recherché [Basseville 93] : un changement rapide ou un saut de valeur seront détectés par une fenêtre courte, alors qu'une fenêtre longue aura pour effet de filtrer la valeur estimée.

## Estimation du nombre de sources

Le nombre de sources représente un des paramètres les plus importants du modèle. Il peut être estimé lors d'une étape d'apprentissage par un expert. Cependant, le caractère de traitement automatisé des signaux iEMG reste un de nos objectifs. Nous présentons une méthode d'estimation du nombre d'unités motrices actives à un instant donné.

Nous reprenons le modèle de Markov caché introduit au chapitre 4 et nous ajoutons une nouvelle partie discrète **A** à l'état : cette partie représente l'**ensemble des sources actives**. Nous présentons section 5.1 une modélisation de l'activité des sources (et donc du nombre de sources  $n_{MU}$ ) à l'intérieur d'un modèle de Markov caché, section 5.2 l'estimation des paramètres du modèle et, enfin, section 5.3, l'algorithme d'estimation global basé sur l'algorithme 2.

L'algorithme proposé ci-dessous activera ou inactivera certaines sources au cours du temps. Lors de l'inactivation d'une ou plusieurs sources, il ne pourra pas activer de sources. Lors de la phase d'activation d'une source, il aura accès à une base de données  $\mathcal{H}$  contenant différentes formes approximatives d'ondelettes. L'activation d'au maximum une des ondelettes sera testée. La base sera obtenue au préalable sur des signaux expérimentaux qui serviront de référence : elle pourra être modifiée lors du fonctionnement de l'algorithme en situation réelle.

### 5.1 Modèle markovien

Jusqu'à présent, nous considérons un nombre connu et constant de sources émettant des trains d'impulsions. De plus, les sources émettant des trains d'impulsions ne changeaient pas. Dans le système considéré, nous remarquons que le nombre de sources peut varier : dans une période sans activité, nous n'observerions pas de sources émettrices, alors que la présence de nombreuses sources marquerait une période de forte activité.

Afin de présenter notre modèle du schéma d'activation et d'inactivation des sources, nous faisons l'hypothèse que le système comporte un nombre limité de sources.

**Nouvel état** Chaque source du système peut être :

- active et rester active, *i.e.* elle peut encore émettre une impulsion ;
- active et s'inactiver, *i.e.* elle n'émettra plus d'impulsions ;
- inactive et s'activer, *i.e.* elle va pouvoir émettre une impulsion.

Nous notons l'ensemble des sources par  $\mathbb{A} = \{1, \dots, N_{\mathbb{A}}\}$  où  $N_{\mathbb{A}}$  est un nombre fini représentant le nombre maximal de sources pouvant être activées. Les sources sont labellisées par les indices  $i \in \mathbb{A}$ .

L'état du modèle se compose de l'ensemble des sources actives, des temps de séjours et des paramètres associés. Cet état est de taille variable puisque le nombre de sources varie. Pour tout  $n \geq 1$  :

- $\mathbf{A}[n]$ , l'ensemble des sources actives, de cardinal  $n_{\text{MU}}[n]$  ;
- $\mathbf{T}[n] = [\mathbf{T}_i[n]]_{i \in \mathbf{A}[n]}$ , concaténation des  $n_{\text{MU}}[n]$  temps de séjour des sources actives, est un vecteur colonne à valeur dans  $\mathbb{N}^{n_{\text{MU}}[n]}$  ;
- $\Theta[n]$ , concaténation des  $n_{\text{MU}}[n]$  lots de deux paramètres  $\Theta_i = \{t_{0,i}, \beta_i\}$  de chaque loi de Weibull discrète provenant des  $n_{\text{MU}}[n]$  sources actives, est un vecteur colonne à valeur dans  $\mathbb{R}^{2n_{\text{MU}}[n]}$  ;
- $\mathbf{H}[n]$ , concaténation des coefficients des  $n_{\text{MU}}[n]$  ondelettes  $H_i$  des sources actives, est un vecteur colonne à valeur dans  $\mathbb{N}^{\ell_{\text{RI}} n_{\text{MU}}[n]}$  ;

L'ensemble  $\bar{\mathbf{A}}$  est l'ensemble des sources inactives de  $\mathbb{A}$ .

**Transition** Nous développons la loi de transition de l'état, c'est-à-dire la loi de l'état  $(\mathbf{A}[n+1], \mathbf{T}[n+1], \Theta[n+1], \mathbf{H}[n+1])$  connaissant l'état  $(\mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n], \Theta[n], \mathbf{H}[n])$ . À l'aide des probabilités conditionnelles, nous pouvons écrire :

- la transition pour les temps de séjour  $\Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t} \mid \mathbf{A}[n+1], \Theta[n+1], \mathbf{H}[n+1], \mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n], \Theta[n], \mathbf{H}[n])$  ; connaissant  $\mathbf{A}[n+1]$ ,  $\Theta[n+1]$ ,  $\mathbf{A}[n]$  et  $\mathbf{T}[n]$ , nous supposons que les ondelettes n'apportent pas d'information, ni les précédentes valeurs des coefficients des lois de Weibull discrètes car nous supposons plus loin que les paramètres des unités motrices restant actives sont inchangés. L'indépendance des sources nous permet d'écrire, pour tout  $n$  et tout  $\mathbf{t} = [\mathbf{t}_i]_{i \in \mathbf{A}[n+1]}$  :

$$\Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t} \mid \mathbf{A}[n+1], \mathbf{A}[n], \Theta[n+1], \mathbf{T}[n]) = \prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \setminus \mathbf{A}[n]} \Pr(\mathbf{T}_i[n+1] = \mathbf{t}_i \mid \Theta_i[n+1]) \times \prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \cap \mathbf{A}[n]} \Pr(\mathbf{T}_i[n+1] = \mathbf{t}_i \mid \Theta_i[n+1], \mathbf{T}_i[n]) \quad (5.1)$$

Nous reconnaissons la probabilité de transition du processus des temps de séjours (3.8) pour une source restant activée ( $i \in \mathbf{A}[n+1] \cap \mathbf{A}[n]$ ) et de la probabilité initiale (3.9) pour une source qui s'active ( $i \in \mathbf{A}[n+1] \setminus \mathbf{A}[n]$ ) ;

- la transition pour les ondelettes  $p_{\mathbf{H}[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1], \Theta[n+1], \mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n], \Theta[n], \mathbf{H}[n]}$  ; connaissant  $\mathbf{A}[n+1]$ ,  $\mathbf{A}[n]$  et  $\mathbf{H}[n]$ , nous supposons que les temps de séjour et des paramètres des lois de Weibull discrètes n'apportent pas d'information.
  - si une source reste active ( $i \in \mathbf{A}[n+1] \cap \mathbf{A}[n]$ ), l'ondelette associée reste constante ;
  - si une source est désactivée ( $i \in \mathbf{A}[n] \setminus \mathbf{A}[n+1]$ ), l'ondelette associée est éliminée dans la transition de  $\mathbf{H}[n]$  vers  $\mathbf{H}[n+1]$  ;
  - si une source est activée ( $i \in \mathbf{A}[n+1] \setminus \mathbf{A}[n]$ ), l'ondelette associée est réinitialisée avec un *prior* gaussien et supposée indépendante des autres ondelettes ;
- la transition pour les paramètres des lois de Weibull discrètes  $p_{\Theta[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1], \mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n], \Theta[n], \mathbf{H}[n]}$  ; connaissant  $\mathbf{A}[n+1]$ ,  $\mathbf{A}[n]$  et  $\Theta[n]$ , les temps de séjours et les coefficients des ondelettes ne nous apportent pas d'informations pour les mêmes raisons que précédemment.
  - si une source reste active ( $i \in \mathbf{A}[n+1] \cap \mathbf{A}[n]$ ), les paramètres de la loi de Weibull discrète associée restent constants ;

- si une source est désactivée ( $i \in \mathbf{A}[n] \setminus \mathbf{A}[n+1]$ ), les paramètres de la loi de Weibull discrète associée sont éliminés dans la transition de  $\Theta[n]$  vers  $\Theta[n+1]$  ;
- si une source est activée ( $i \in \mathbf{A}[n+1] \setminus \mathbf{A}[n]$ ), les paramètres de la loi de Weibull discrète associée sont initialisés par la méthode décrite dans la section 3.2.4.
- la transition pour l'ensemble des sources actives  $\Pr(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a} | \mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n], \Theta[n], H[n])$ . Nous proposons la stratégie suivante, bâtie indépendamment de  $\Theta[n]$  et  $H[n]$ , pour tout  $\mathbf{a} \subset \mathbb{A}$  :
  - s'il existe des sources  $i$ , telles que  $T_i[n] = t_i$ , alors :

$$\Pr(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a} | \mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n]) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{a} = \mathbf{A}[n] \setminus \{i \in \mathbf{A}[n] \mid T_i[n] = t_i\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $t_i$  est le temps à partir duquel une source est inactivée. Ce temps est grand devant la longueur des ondelettes  $\ell_{\text{RI}}$ , devant le temps réfractaire  $t_{\text{R}}$  (*i.e.* une source n'ayant pas émis d'impulsion depuis un temps  $t_i$  est supposée inactive)<sup>1</sup> ;

- sinon, parmi les sources inactives de  $\bar{\mathbf{A}}[n]$ , au plus une source est activée :

$$\Pr(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a} | \mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n]) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\text{card}(\bar{\mathbf{A}}[n])} & \text{si } \exists ! i \in \bar{\mathbf{A}}[n] \text{ tel que } \mathbf{a} = \mathbf{A}[n] \cup \{i\} \\ 1 - \lambda & \text{si } \mathbf{a} = \mathbf{A}[n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.3)$$

où  $\lambda$  est la probabilité d'activation toutes sources confondues, et où  $\text{card}(\bar{\mathbf{A}}[n])$  est le nombre de sources inactives. Dans le cas où il n'y aurait plus de sources à activer, la probabilité sans ajout de source vaut alors 1 (car  $\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{A}[n]$ ).

D'autres scénarios sont envisageables.

**Remarque 7.** Les parties de l'état  $\mathbf{T}$ ,  $\Theta$  et  $H$  ne sont plus constantes en dimension comme dans le chapitre précédent. Le nombre d'états de ce modèle est de  $\ell_{\text{RI}} + 4$  états par éléments de  $\mathbf{A}$  (soit un nombre d'états maximum de  $(\ell_{\text{RI}} + 4)N_{\mathbb{A}}$  si toutes les sources étaient activées).

**Observation** La loi d'observation associée s'écrit

$$Y[n] = \psi(\mathbf{T}[n]) H[n] + W[n] \quad (5.4)$$

où  $\psi(\mathbf{T}[n])$  est la concaténation ligne des vecteurs  $[\varphi(T_i)]_{i \in \mathbf{A}[n]}$ . Il n'est pas nécessaire de faire intervenir  $\mathbf{A}[n]$  dans cette formule car la dimension de  $\mathbf{T}[n]$  et  $H[n]$  lève toute ambiguïté sur le nombre de sources activées et dans l'hypothèse où toutes les ondelettes sont de même longueur.

## 5.2 Filtre bayésien

**Principe** Nous propageons la probabilité *a posteriori* du nouvel état du modèle de Markov caché grâce à un filtre bayésien. La probabilité *a posteriori* de l'état  $p_{\Theta^n, H^n, \mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n}^n$  est développée à l'aide des probabilités conditionnelles afin d'obtenir une formulation récursive (le principe est le même que celui énoncé section 4.2.1).

<sup>1</sup> Les sources sont inactivées de façon déterministe

**Estimation des ondelettes par filtre de Kalman** Connaissant la séquence des sources activées  $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1}$  et la séquence des temps de séjour  $\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n$  depuis l'origine des temps, le modèle se réduit à :

$$\begin{cases} p_{H[n+1]|\mathbf{A}[n+1]=\mathbf{a}[n+1],\mathbf{A}[n]=\mathbf{a}[n],H[n]} \text{ donné dans le paragraphe « Transition » de la section 5.1} \\ Y[n] = \psi(\mathbf{t}[n])\mathbf{H}[n] + W[n] \end{cases} \quad (5.5)$$

À sources actives inchangées, le filtre de Kalman présenté dans la section 4.2.2 se réécrit, une fois décomposé en étape d'estimation et de prédiction :

- Estimation de l'état :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n} &= \mathbf{P}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^{n-1}} \psi(\mathbf{t}[n])^\top \nu_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{-1} \\ \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]} &= \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^{n-1}}^{[n-1]} + \mathbf{K}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n} (Y[n] - \hat{Y}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n-1]}) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n} &= \mathbf{P}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^{n-1}} - \mathbf{K}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n} \nu_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n} \mathbf{K}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^\top \end{aligned} \quad (5.6)$$

- Prédiction de l'état :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n}^{[n]} &= \mathbf{H}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n} &= \mathbf{P}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n} \end{aligned} \quad (5.7)$$

- Prédiction de l'observation :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^{n+1}}^{[n]} &= \psi(\mathbf{t}[n+1]) \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n}^{[n]} \\ \nu_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^{n+1}} &= \psi(\mathbf{t}[n+1]) \mathbf{P}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n} \psi(\mathbf{t}[n+1])^\top + v \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dans le cas d'apparition ou de disparition de sources, seule l'étape de prédiction de l'état est changée :

- si  $\mathbf{a}[n+1] = \mathbf{a}[n]$ , nous retrouvons l'équation (5.7) ;
- si  $\mathbf{a}[n+1] \subset \mathbf{a}[n]$ , les coefficients dans  $\mathbf{H}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]}$ , les lignes et les colonnes de  $\mathbf{P}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n}$ , qui correspondent à la source désactivée sont ôtés. Si tous les scénarios désactivent une source, l'ondelette de celle-ci est rangée dans un dictionnaire ;<sup>2</sup>
- si  $\mathbf{a}[n+1] = \mathbf{a}[n] \cup \{i\}$ , l'ondelette est initialisée à la valeur moyenne  $\mathbf{H}_i^{[n]}$  des autres scénarios pondérés par leur probabilité, s'il existe des scénarios où elle est présente. Si elle n'intervient dans aucun des scénarios, elle est récupérée dans le dictionnaire. Dans tous les cas, un *prior* gaussien à variance diagonale, indépendant des autres ondelettes est choisi pour l'initialisation : cela revient à rajouter des lignes à  $\mathbf{H}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]}$  et un bloc diagonal à  $\mathbf{P}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}$  pour obtenir  $\mathbf{H}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n}^{[n]}$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n}$ .

**Estimation de la variance** La variance est estimée d'une façon similaire à celle développée en section 4.2.3 :

$$\hat{V}^{[n]} = \sum_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n} \hat{V}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]} \Pr^{[n]}(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \quad (5.9)$$

où  $\hat{V}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]}$  est obtenue par filtrage de la quantité  $Y[n] - \psi(\mathbf{t}[n]) \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]}$ .

<sup>2</sup> La source associée à cette ondelette est considérée comme inactive.

**Probabilité *a posteriori* de l'état** Avec pour *prior*  $\Pr(\mathbf{T}^1 = \mathbf{t}^1 | Y^0)$ , la probabilité *a posteriori* de l'état s'obtient pour tout  $n \geq 1$  :

$$\textbf{Mise à jour : } \Pr^n(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \propto \Pr^{n-1}(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) g(Y[n] - \widehat{Y}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{n-1}, \nu_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}) \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \textbf{Prédiction : } \Pr^n(\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{t}^{n+1}) &= \Pr^n(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \times \\ &\Pr(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1] | \mathbf{A}[n] = \mathbf{a}[n], \mathbf{T}[n] = \mathbf{t}[n]) \times \\ &\Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \end{aligned} \quad (5.11)$$

où  $g(\cdot, \nu_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n})$  désigne la valeur de la gaussienne de variance  $\nu_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}$  (obtenue par le filtre de Kalman), où le deuxième terme  $\Pr(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1] | \mathbf{A}[n] = \mathbf{a}[n], \mathbf{T}[n] = \mathbf{t}[n])$  de la prédiction est obtenue par les formules (5.2) et (5.3). Le troisième terme de la prédiction va être décomposé en tirant successivement parti de la loi des probabilités totales, de la formule (5.1) et de l'indépendance des sources :

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{T}^n) &= \prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \setminus \mathbf{A}[n]} \mathbb{E} \left\{ \frac{s(\mathbf{t}_i[n] + 1, \boldsymbol{\Theta}_i[n+1])}{\mathbb{E}\{\Delta_i | \boldsymbol{\Theta}_i[n+1]\}} \right\} \times \\ &\prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \cap \mathbf{A}[n]} \begin{cases} \mathbb{E}\{r(\mathbf{t}_i[n] + 1, \boldsymbol{\Theta}_i[n+1]) | \mathbf{A}^n, \mathbf{T}_i^n\} & \text{si } \mathbf{t}_i[n+1] = 0 \\ 1 - \mathbb{E}\{r(\mathbf{t}_i[n] + 1, \boldsymbol{\Theta}_i[n+1]) | \mathbf{A}^n, \mathbf{T}_i^n\} & \text{si } \mathbf{t}_i[n+1] = \mathbf{t}_i[n] + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

où  $r(t, \theta)$  et  $s(t, \theta)$  sont respectivement le taux de hasard et la fonction de fiabilité définis formules (3.6) et (3.5). La preuve se trouve en annexe H.

Comme dans le chapitre précédent, nous linéarisons les fonctions impliquées ci-dessus pour calculer une approximation des espérances mathématiques. Cette linéarisation se fait autour de  $\theta_{\mathbf{T}_i^0}$  pour le terme qui contient  $s(t, \theta)$ , et autour de  $\widehat{\theta}_{\mathbf{A}^n, \mathbf{T}_i^n}$  pour le terme qui contient  $r(t, \theta)$ , paramètre estimé par maximum de vraisemblance récursif depuis la dernière activation par la méthode décrite en section 3.2.4.

**Estimateurs** Nous calculons les estimateurs suivant la méthode suivante : les estimateurs sont définis comme dans la section 4.2.1 du chapitre 4 précédent parmi tous les états qui appartiennent à l'ensemble de sources actives le plus probable (nous présélectionnons cet ensemble, étant une variable à valeurs discrètes).

## 5.3 Algorithme général

**Algorithme** Nous reprenons l'algorithme 2 présenté au chapitre 4. Nous ajoutons l'étape d'inactivation et d'activation des sources lors de l'étape de prédiction, juste avant la proposition des bifurcations possibles.

Nous donnons l'algorithme 3, puis nous détaillerons l'initialisation des paramètres du modèle.

**Complexité** La complexité de l'algorithme est limitée par l'étape de mise à jour de la matrice de variance-covariance  $\mathbf{P}_{\mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n}$  du filtre de Kalman : dans le cas où toutes les sources sont activées, la complexité sera au maximum en  $\mathcal{O}((\ell_{\text{RI}} N_{\mathbb{A}})^2)$ . Cependant, la complexité sera fonction du nombre moyen de sources actives, soit  $\mathcal{O}\left(\left(\overline{\text{card}(\mathbf{A})} \ell_{\text{RI}}\right)^2\right)$ .

**Initialisation** En l'absence de modèle physiologique, nous choisissons le temps d'inactivation  $t_i$  à  $200ms$  et le taux d'activation  $\lambda$  à  $10^{-3}$ . A l'instant initial, aucun état n'a de source active. Tous les états reçoivent la même probabilité initiale  $\Pr^0(\mathbf{T}[1] = \mathbf{t}[1]) = 1/n_s$ . Seule l'activation d'une source est alors possible (première étape de prédiction).  $\widehat{V}_{\mathbf{t}^0}^0$  est estimé au début du signal sur une zone de non-activité.

**Adaptativité** L'adaptativité des estimateurs peut être mise en place comme en section 4.4.

**Algorithme 3:** Algorithme général de déconvolution à sources inconnues.

Initialiser le dictionnaire  $\mathcal{H}$ , la variance du bruit  $v$  (voir paragraphe 4.3.4)

**pour** les  $n_s$  états initiaux **faire**

Initialiser la probabilité *a priori* à  $1/n_s$

Tirer  $\alpha$  suivant une loi uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$

**si**  $\alpha < \lambda$  **alors**

Activer au hasard une source inactive  $i \in \overline{\mathbf{A}}[1]$

Initialiser  $\mathbf{t}[1] = [\mathbf{t}_j[1]]$ ,  $\mathbf{a}[1] = \{i\}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{a}^1, \mathbf{t}_i^1}$  et  $\mathbf{G}_{\mathbf{a}^1, \mathbf{t}_i^1}$  suivant la méthode en section 3.2.4,  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^1, \mathbf{t}^0}^{[0]}$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{a}^1, \mathbf{t}^0}$  (voir paragraphe « Estimation des ondelettes par filtre de Kalman » de la section 5.2)

**fin**

Mise à jour des probabilités *a priori*  $\Pr^{[0]}(\mathbf{A}^1 = \mathbf{a}^1, \mathbf{T}^1 = \mathbf{t}^1)$  suivant la formule (5.3)

Prédire  $\hat{Y}_{\mathbf{a}^1, \mathbf{t}^1}^{[0]}$  avec la formule (5.4) et  $\nu_{\mathbf{a}^1, \mathbf{t}^1}$  avec la formule (5.8)

**fin**

**pour**  $n \geq 1$  **faire**

**nouvelle donnée**  $Y[n]$  **mesurée**

**pour** les  $\mathbf{t}^n$  retenues **faire**

Calcul de la probabilité *a posteriori*  $\Pr^{[n]}(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  avec la formule (5.10)

**fin**

Sélectionner et garder les  $n_s$  séquences les plus probables

**pour** les séquences  $\mathbf{t}^n$  **faire**

Mettre à jour  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}$  avec la formule (5.6)

Mettre à jour  $\hat{V}_{\mathbf{t}^n}^{[n]}$  par la méthode décrite paragraphe « Estimation de la variance »

**fin**

Calculer les estimés  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{[n]}$  et  $\hat{\mathbf{H}}^{[n]}$  par (4.4), (4.5) (sur l'ensemble plus probable) et  $\hat{V}^{[n]}$  par (5.9)

**pour** les  $\mathbf{t}^n$  retenues **faire**

**pour** toutes les sources  $i$  de  $\mathbf{t}^n$  **faire**

**si**  $\mathbf{t}_i[n] = t_i$  **alors**

Inactiver la source  $i$  et mettre à jour  $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n \setminus \{i\}$

Supprimer les lignes correspondantes de l'état  $\mathbf{t}[n]$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{[n]}$  et de  $\mathbf{P}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}$

**sinon**

Tirer  $\alpha$  suivant une loi uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$

**si**  $\alpha < \lambda$  **alors**

Activer au hasard une source inactive  $j \in \overline{\mathbf{A}}[n]$

Mettre à jour  $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n \cup \{j\}$ ,  $\mathbf{t}[n]$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}_j^n}$ ,  $\mathbf{G}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}_j^n}$  suivant la méthode en section 3.2.4,  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n}^{[n]}$ , et  $\mathbf{P}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^n}$  (voir paragraphe « Estimation des ondelettes par filtre de Kalman » (section 5.2)

**fin**

**fin**

Mise à jour des probabilités *a priori*  $\Pr^{[n]}(\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  suivant (5.2) et (5.3)

**fin**

**pour** toutes bifurcations  $\mathbf{t}^{n+1}$  possibles venant de  $\mathbf{t}^n$  **faire**

**pour** chaque source  $i$  de  $\mathbf{t}^{n+1}$  **faire**

Calculer  $\Pr^{[n]}(\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{T}_i^{n+1} = \mathbf{t}_i^{n+1})$  avec la formule (5.12)

Calculer  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}_i^{n+1}}$  et  $\mathbf{G}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}_i^{n+1}}$  avec les formules (3.17) et (3.18)

**fin**

Prédire  $\hat{Y}_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^{n+1}}^{[n]}$  avec la formule (5.4) et  $\nu_{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{t}^{n+1}}$  avec la formule (5.8)

**fin**

**fin**

**fin**



## Signaux simulés

Afin de présenter les performances de l'algorithme 2, nous faisons varier plusieurs paramètres de la méthode : la longueur de la fenêtre d'oubli  $\ell_\infty$  (réglant l'adaptativité) et le nombre de séquences sélectionnées  $n_s$ . De plus, nous ferons varier le nombre de sources  $n_{\text{MU}}$  contenu dans le signal afin de présenter les capacités de déconvolution de l'algorithme. Nous utiliserons alors les paramètres optimaux de réglage de la méthode afin d'exécuter l'algorithme d'estimation du nombre de sources (algorithme 3).

Nous simulerons les signaux en essayant de se rapprocher le plus possible des caractéristiques des signaux iEMG relevés dans les muscles de l'avant-bras. Nous évoquerons le comportement général des algorithmes pour chaque cas, en commentant les résultats pour plusieurs valeurs de paramètres et en donnant les performances en termes de temps de calcul. Après la validation de nos algorithmes sur des signaux simulés, nous présenterons au chapitre 7 des résultats sur des signaux réels traités par les deux algorithmes développés dans ce manuscrit.

Les algorithmes de déconvolution sont implémentés et exécutés sous le logiciel MATLAB v8.0.0.783 (R2012b), installé sur un PC équipé d'un Intel Core i7-3770 à 3.40GHz et d'une RAM de 8Go.

### 6.1 Simulation d'un signal

Nous initialisons les paramètres de la méthode :

- la période réfractaire  $t_R$  est fixé à 300 :  $t_R$  est supérieur à zéro car pour des signaux réels, deux impulsions de la même source ne peuvent pas se produire simultanément. Ce réglage n'induit pas de restriction pour l'estimation des paramètres, il influence la performance au niveau du temps de calcul : plus le temps de réfraction est grand, plus la réduction du nombre de séquences possibles est importante (voir paragraphe 4.3.1) ;
- les paramètres  $t_{0,i}$  sont tirés suivant une loi uniforme  $\mathcal{U}[600, 900]$ . Ces paramètres sont du même ordre de grandeur que le temps réfractaire  $t_R$  (plage courante pour des signaux réels) ;
- les paramètres  $\beta_i$  sont tirés suivant une loi uniforme  $\mathcal{U}[1, 10]$  (plage de valeurs observées sur les signaux réels). Plus  $\beta_i$  sera grand, plus le train d'impulsions  $U_i$  sera régulier ;
- les coefficients des ondelettes  $h_i$  seront pris suivant différentes formes de MUAP relevées sur des signaux iEMG. Elles sont normalisées (une amplitude maximum à 1) : cela n'a pas d'incidence sur la déconvolution. Leur longueur est fixée à  $\ell_{\text{RI}} = 70$ , ce qui permet de représenter correctement les larges MUAP, sans trop allonger le temps de calcul ;

- la variance du bruit  $v$  est choisie pour que le rapport signal sur bruit soit compris entre 10dB et 20dB (plage de valeurs couramment observée).

Nous constituons des signaux en se basant sur le modèle (2.1).

**Remarque 8.** Le rapport signal à bruit, ou parfois dénommé SNR (Signal to Noise Ratio) est une façon de quantifier l'information utile (le signal) par rapport à l'information non désirée (le bruit). Une de ces définitions se rapporte à calculer 10 fois le logarithme en base 10 du rapport entre la variance du signal et celle du bruit :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{v_{signal}}{v_{bruit}}$$

Il s'exprime en décibel (dB). Un SNR de 10dB signifie que le signal est noyé dans un bruit de variance dix fois plus petite ; pour un SNR de 20dB, dans un bruit de variance 100 fois plus petite ; pour un SNR de 30dB, dans un bruit de variance 1000 fois plus petite, etc.

Nous définissons un cas nominal afin d'effectuer les différentes simulations. Le signal simulé dure 80000 instants (un laps temporel de ce signal est présenté Figure 6.1) : il est composé d'un nombre de sources  $n_{MU}$  égal à 4, une longueur de fenêtre d'oubli de taille équivalente à dix temps inter-impulsions (soit,  $\ell_\infty \approx 20t_R$ ) et un nombre de séquences retenues  $n_s$  égal à 64.

Pour chacune des trois études à nombre de sources constant (variation de  $n_s, n_{MU}, \ell_\infty$ ) et pour l'étude à nombre de sources  $n_{MU}$  variable, nous présenterons les estimateurs obtenus parmi l'estimé du signal  $\hat{y}^{n|n}$ , les estimés des séquences d'impulsions  $\hat{\mathbf{t}}^{n|n}$ , les estimés de la forme des ondelettes  $\hat{h}_i^{n|n}$  et les estimés des paramètres  $\hat{t}_{0,i}$  et  $\hat{\beta}_i$  pour chaque source (ou leur taux de décharge associés). Nous effectuerons certains tests à paramètre  $\Theta$  constant pour vérifier la bonne marche de l'algorithme et d'autres à paramètre  $\Theta$  variable pour tester l'adaptativité des estimateurs.

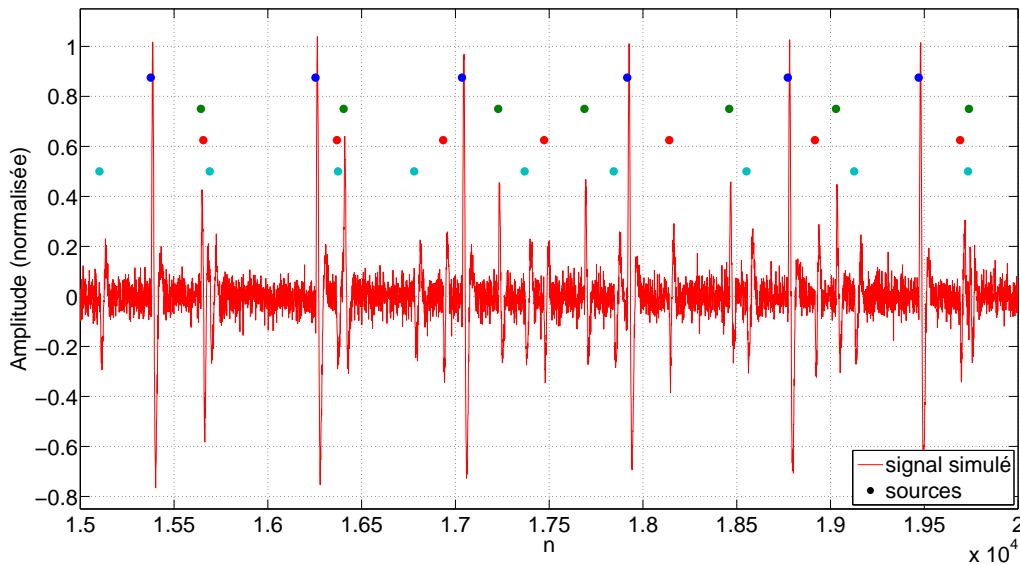


FIGURE 6.1 – Signal simulé contenant la somme bruitée de 4 trains d'impulsions convolués par leur ondelette (courbe rouge) et les 4 trains d'impulsions (points).

Nous notons que les ondelettes extraites ont des amplitudes maximales contenues dans une plage de valeurs de 0.25 à 1 (sans unité). De plus, certaines ondelettes se ressemblent. Nous notons aussi la présence d'interférences entre les différents trains d'ondelettes vers les instants 15650 (trains 2-3-4), 16400 (trains 2-3-4) et 19550 (trains 2-4) (d'autres interférences apparaissent le long du signal) : cela correspond aux observations faites sur des signaux iEMG.

## 6.2 Première étude : variation du nombre de séquences retenues $n_s$

Le paramètre du nombre de séquences retenues  $n_s$  est l'un des paramètres le plus important de notre étude. Plus il sera grand, plus la déconvolution et l'estimation des autres paramètres seront précises. En contrepartie, plus il sera petit, plus la capacité de stockage et le temps de calcul nécessaires seront faibles.

Or notre objectif est de faire fonctionner notre méthode en ligne : un temps de calcul raisonnable doit être obtenu. Nous montrons expérimentalement qu'il existe une limite basse au nombre de séquences retenues pour que la déconvolution soit effectuée) : en dessous de cette valeur l'algorithme ne la réalise pas du fait de l'indétermination dans les interférences (qui peuvent être obtenue par une infinité de sommes). De plus, une limite haute est imposée par les capacités de calcul de l'ordinateur ou du GPU utilisé.

Pour montrer ces limites, nous prenons un nombre de séquences retenues dans l'ensemble  $\{1, 2, 4, 8, 16, 64\}$  (cas nominal de simulation de paramètres constants des lois de Weibull discrètes) : nous montrons les estimés du signal en Figure 6.2.<sup>1</sup>

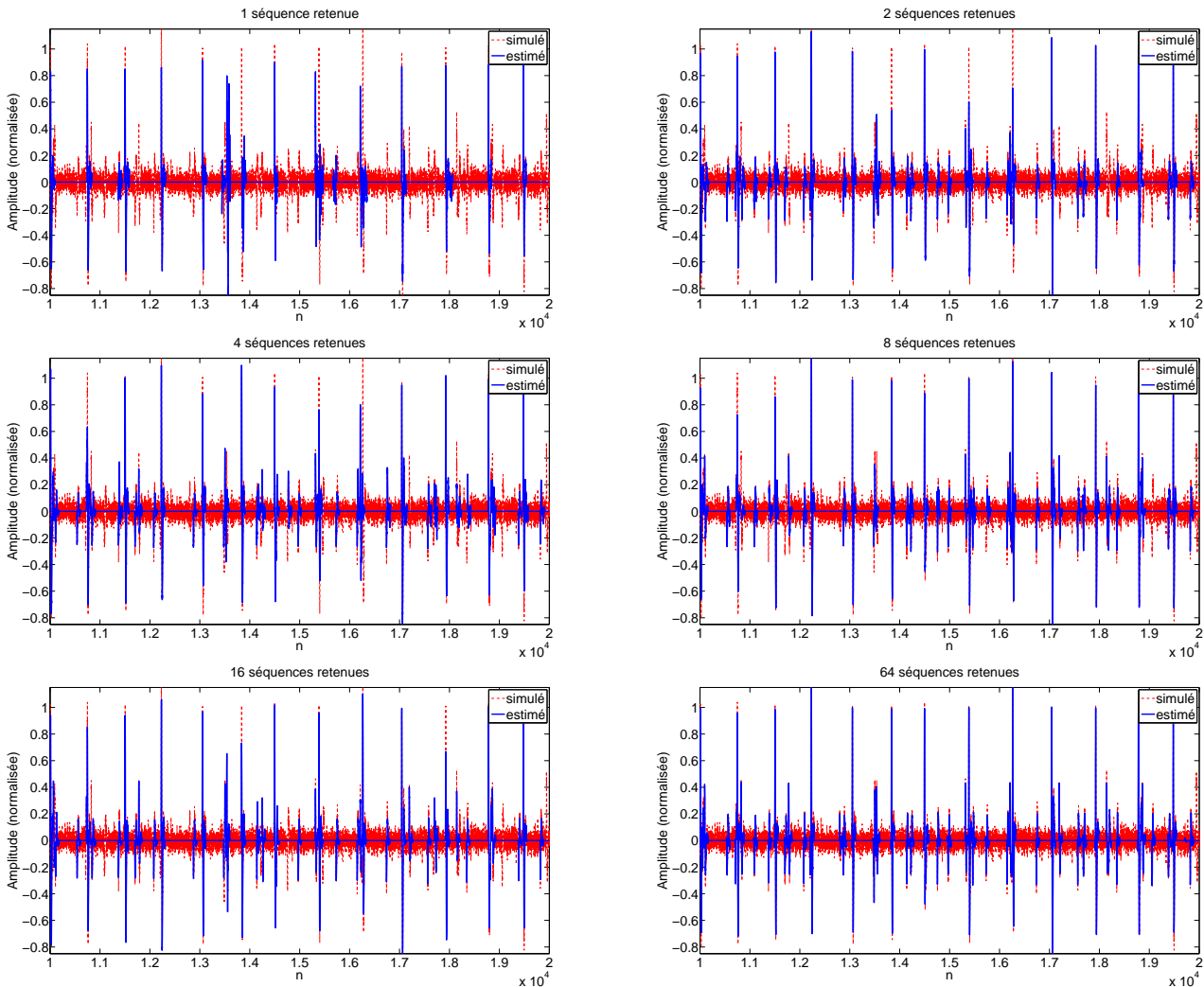


FIGURE 6.2 – Estimés  $\hat{y}^n$  pour un nombre de séquences retenues  $n_s = \{1, 2, 4, 8, 16, 64\}$ .

Les temps de calcul (en seconde) pour chacun des essais sont respectivement : 155, 253, 466, 894, 1687 et 6196. Après analyse, nous trouvons une droite de régression pour le temps de calcul de  $t_{calcul} = 95.6n_s + 95.16$  (s), qui a un coefficient de régression de 0.9997. Ceci confirme la relation linéaire entre complexité de calcul et nombre de séquences retenues  $n_s$ .

<sup>1</sup> Pour le reste du manuscrit, les valeurs de simulation sont en trait pointillé rouge, les valeurs d'initialisation sont en trait pointillé noir et les valeurs estimées en trait plein bleu

Nous retenons de ces essais que pour quatre sources, un nombre  $n_s$  de 64 séquences retenues à chaque étape est suffisant pour assurer une déconvolution convenable. En faisant d'autres expérimentations, nous avons pu remarquer que pour un nombre de 64 séquences retenues, la déconvolution était satisfaisante pour des signaux engendrés par la somme de 1 à 6 trains d'ondelettes. Il faut augmenter le nombre de séquences retenues à 1024 dans le cas de mélange à 8 sources.

### 6.3 Deuxième étude : variation du nombre de sources $n_{\text{MU}}$

Nous faisons varier le nombre de sources  $n_{\text{MU}}$  dans l'ensemble  $\{1, 4, 6\}$  (cas nominal de simulation de paramètres constants de lois de Weibull discrètes). Le nombre de sources va influencer principalement le nombre d'interférences (superpositions d'ondelettes) dans le signal, ainsi que le nombre de bifurcations possibles (accroissement du nombre de séquences possibles). Les temps de calculs seront plus longs pour un nombre de sources plus grand, car le filtre de Kalman est de complexité de calcul en  $\mathcal{O}((n_{\text{MU}}\ell_{\text{RI}})^2)$ .

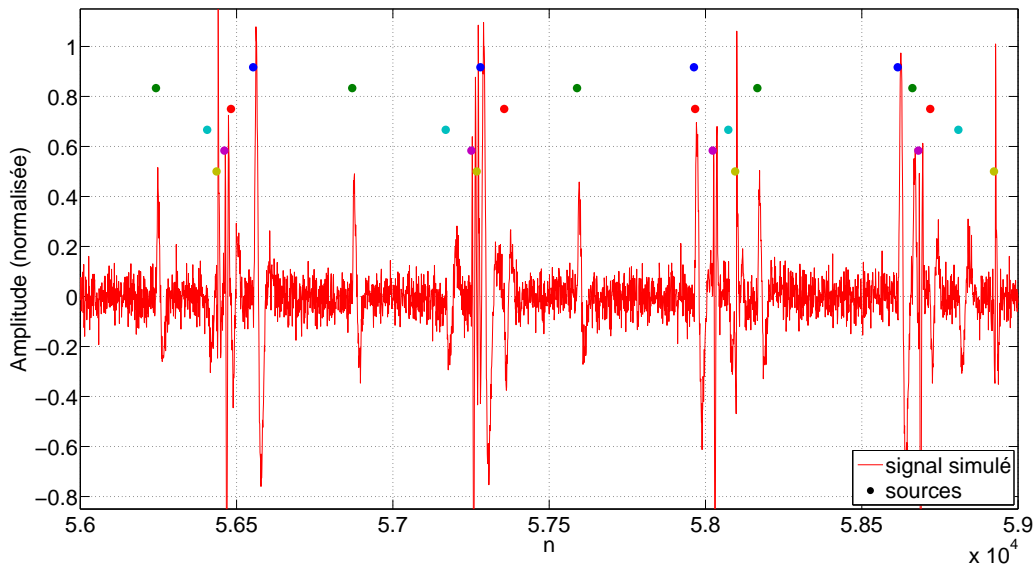


FIGURE 6.3 – Signal simulé contenant 6 sources entre les instants 56000 et 59000.

Une partie d'un signal simulé contenant 6 sources est présenté en Figure 6.3. Les temps de calculs (en secondes) sont respectivement 764, 6338 et 16656 pour les signaux avec 1, 4 et 6 sources. Nous notons une légère différence avec le temps de calcul pour un signal simulé contenant 4 sources de la première étude (6196 secondes, soit 2, 3% de différence) : d'un essai à l'autre, le nombre de séquences visitées peut différer. Les temps présentés ici sont caractéristiques. Nous remarquons aussi que le temps de calcul n'augmente pas de façon linéaire avec le nombre de sources.

La reconstruction générale est correcte pour les trois cas : les estimés du signal correspondent aux signaux simulés et les trains d'impulsions sont retrouvés quasi-parfaitement pour chaque source (graphiques à gauche dans la Figure 6.4)<sup>2</sup>. Nous voyons que pour les signaux avec 4 et 6 sources, les interférences sont importantes : la déconvolution est effectuée correctement.

Les ondelettes sont bien estimées (graphiques à droite dans la Figure 6.4) :<sup>3</sup> la forme générale est toujours bien retrouvée, même si un décalage apparaît dans certains cas (quatrième ondelette pour le cas à 6 sources).

<sup>2</sup> Dans le reste du manuscrit, les trains d'impulsions simulés sont localisés par des points rouges, les estimés des trains par des points bleus.

<sup>3</sup> Dans le reste du manuscrit, les ondelettes de simulations sont en trait pointillé rouge, les estimés finaux des ondelettes en trait plein bleu et les ondelettes à l'initialisation en trait pointillé noir.

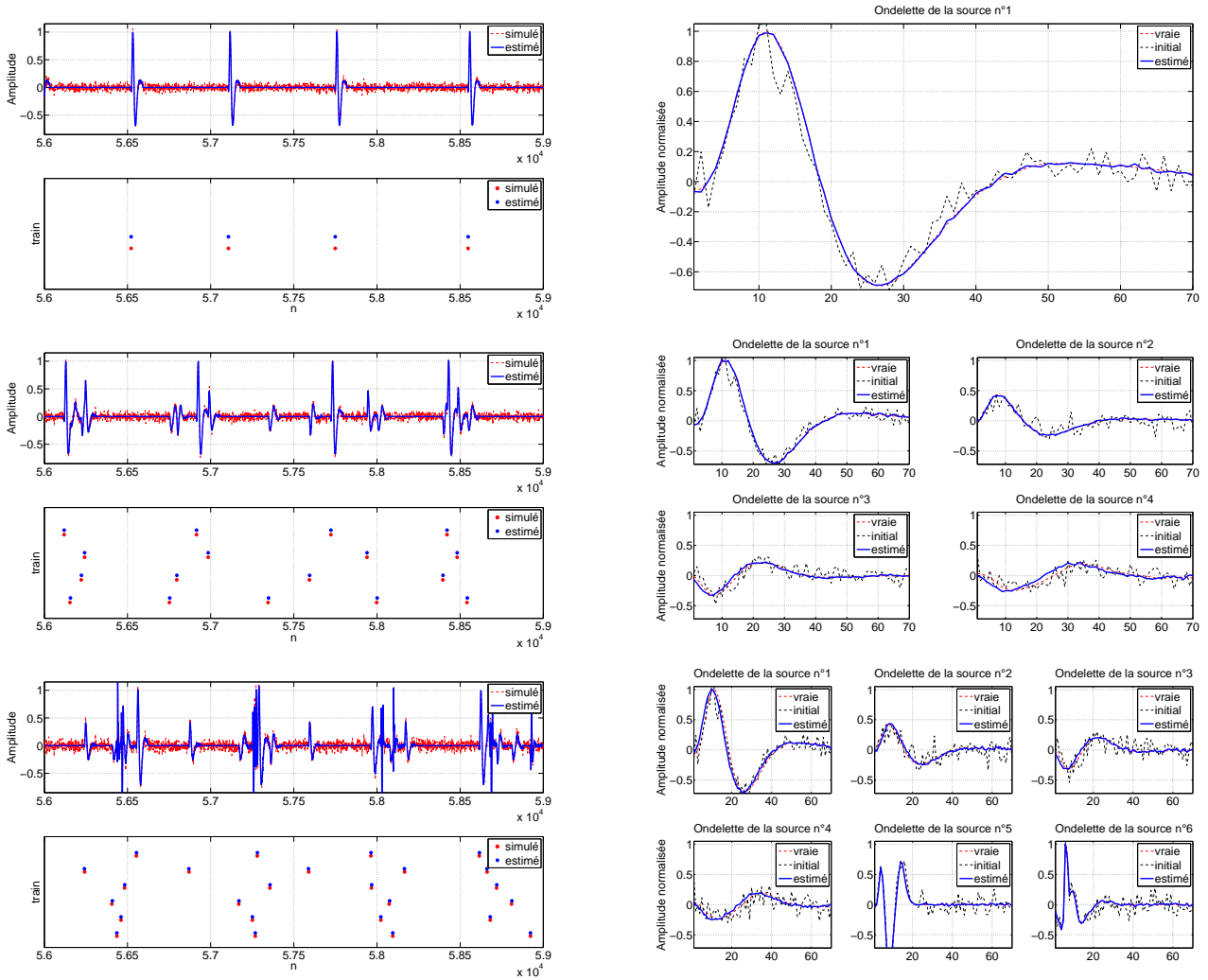


FIGURE 6.4 – Estimés du signal, de la meilleure séquence *a posteriori* et des ondelettes (initiale, estimée et la vraie), pour les signaux avec 1, 4 ou 6 sources (de haut en bas).

Les estimations des paramètres  $t_0$  et  $\beta$ , présentées en Figure 6.5, montrent à nouveau le bon fonctionnement de l'algorithme. Comme attendu, les estimations de  $t_0$  rejoignent rapidement les valeurs de simulations et sont très stables ; les estimations de  $\beta$  convergent plus lentement et moins uniformément. Sur le graphique de  $\hat{\beta}$  pour le cas à 1 source, nous voyons le procédé d'initialisation apparaître en début d'estimation. Sur le graphique de  $\hat{\beta}$  pour le cas à 4 sources, les estimés de  $\beta$  pour les sources 2 et 3 (en vert foncé et rouge) subissent des « chutes » autour respectivement des instants 36000 et 17000 : pour chaque source, une impulsion n'est pas identifiée. Du point de vue des estimateurs, cela rend les trains d'impulsions plus irréguliers ; la valeur de  $\beta$  est donc abaissée.

Cependant, nous remarquons sur la Figure 6.6 que les taux décharges associés sont très stables.<sup>4</sup> Dans chaque cas présenté ici, les taux de décharges estimés rejoignent leur valeur de simulation après 10000 instants. Nous remarquons sur ces graphiques, que les estimés (trait plein bleu) suivent assez fidèlement les valeurs des inverses des temps inter-impulsion : cela correspond à l'adaptation des valeurs estimées (la variabilité des trains est visible sur chaque graphique par le saut de valeurs dans les courbes en noir).

<sup>4</sup> Dans le reste du manuscrit, nous mettrons les valeurs de simulation des taux de décharges en trait plein rouge, les valeurs estimées en trait plein bleu et l'inverse des temps inter-impulsion en trait pointillé noir.

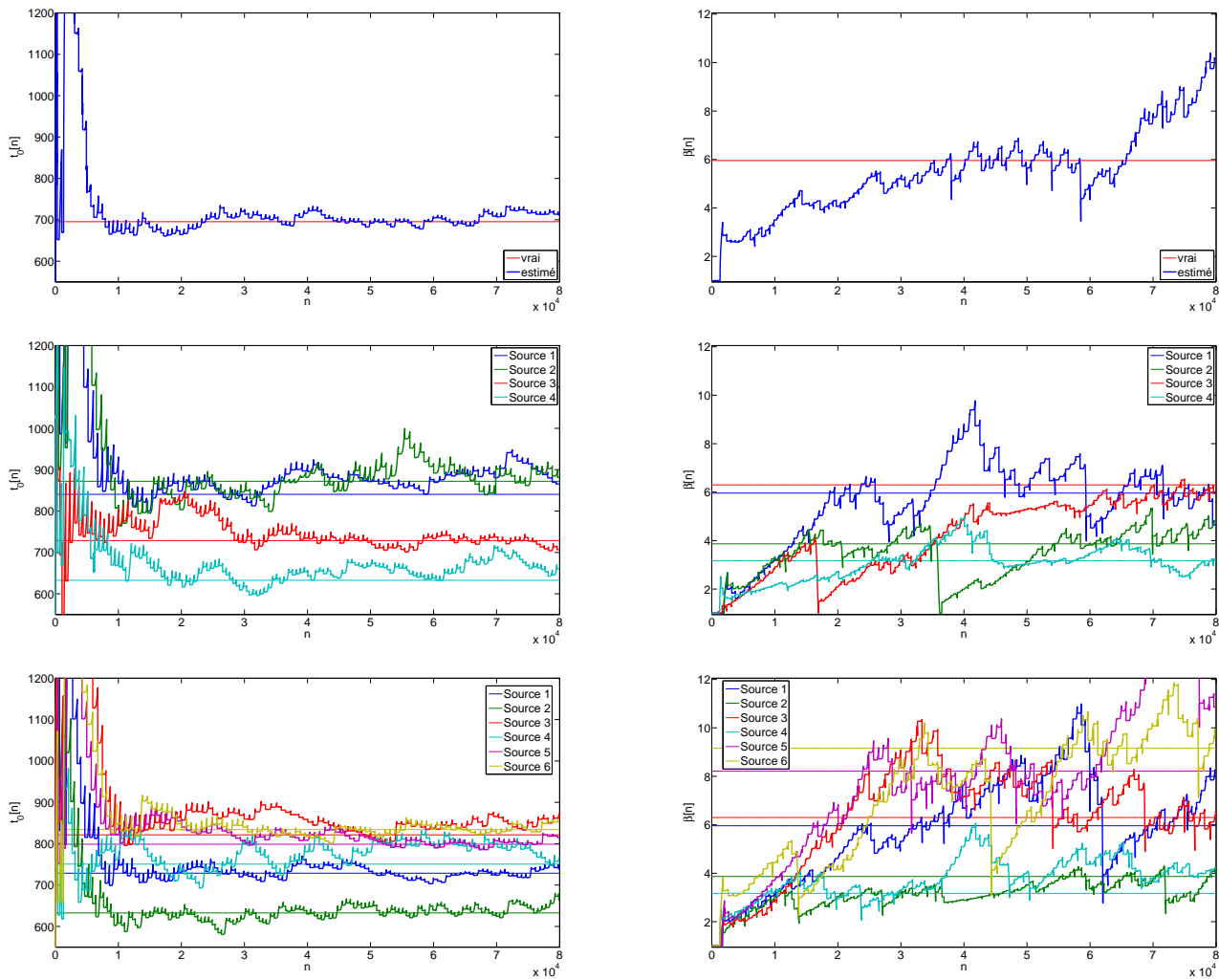


FIGURE 6.5 – Estimés des paramètres  $t_0$  et  $\beta$  pour les signaux avec 1, 4 ou 6 sources (de haut en bas) : les courbes représentent les estimés, les droites les valeurs exactes des paramètres lors de la simulation.

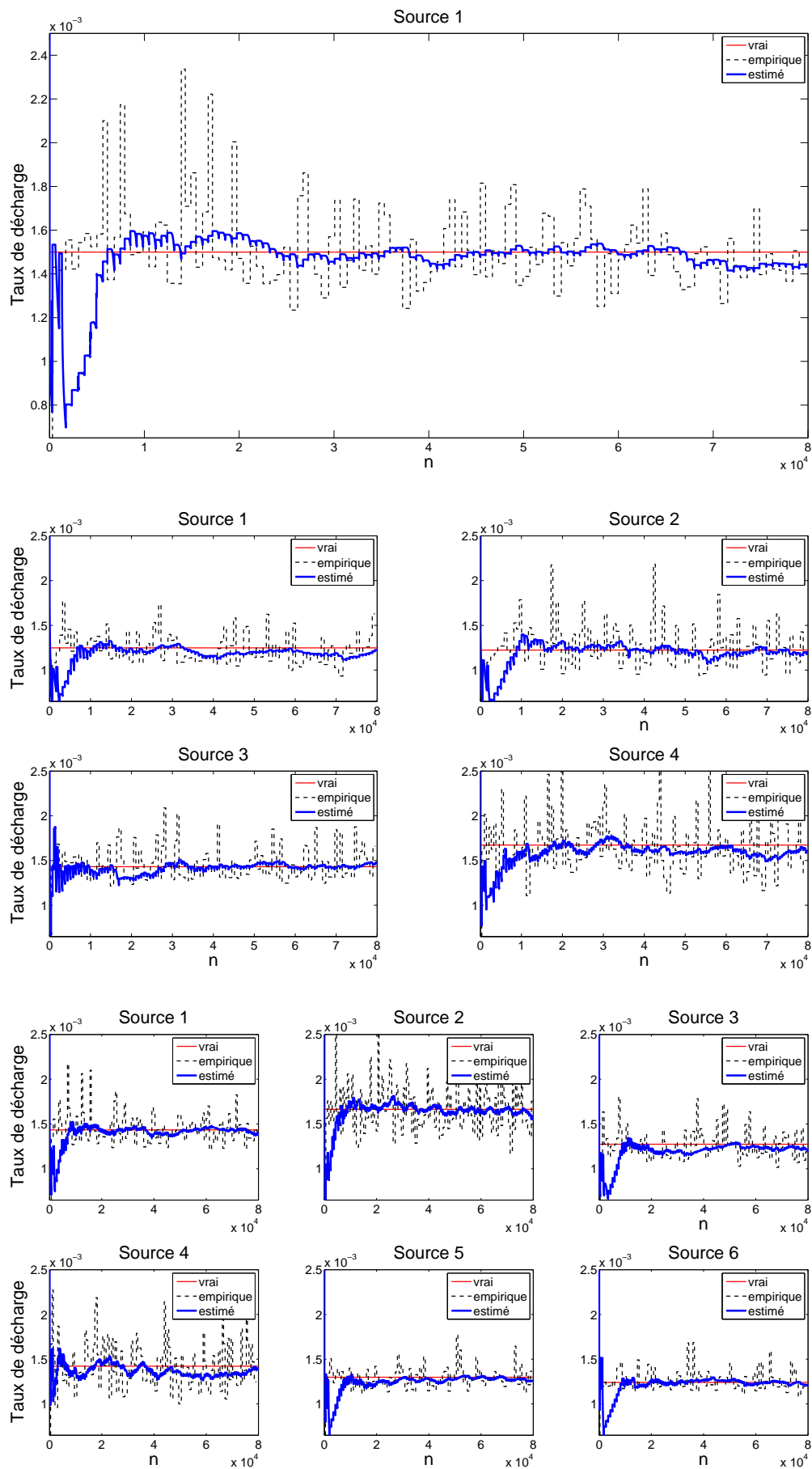


FIGURE 6.6 – Estimés des taux de décharges pour les signaux avec 1, 4 ou 6 sources (respectivement de haut en bas) : les courbes représentent les estimés, les droites les valeurs exactes des paramètres lors de la simulation et les courbes en escalier les valeurs empiriques.



## 6.4 Troisième étude : variation de la longueur de la fenêtre d'oubli $\ell_\infty$

La taille de la fenêtre  $\ell_\infty$  va dépendre du temps inter-impulsion moyen pour une source et du type de suivi voulu. Pour se rendre compte de l'influence de ce paramètre, nous prenons  $\ell_\infty$  dans l'ensemble des multiples  $\{1, 2, 5, 10, 20, +\infty\}$  de l'espérance du temps inter-impulsion  $E\{\Delta|\Theta\}$ . Rappelons qu'un ordre de grandeur  $E\{\Delta|\Theta\}$  est de  $2t_R$  à  $3t_R$ .

Nous nous plaçons dans le cas nominal avec un signal simulé de longueur doublée (160000 instants) contenant une source et où les paramètres de la loi de Weibull discrète sont constants par morceaux :

- du 1<sup>er</sup> au 40000<sup>e</sup> instant, les paramètres sont constants ;
- du 40001<sup>e</sup> au 80000<sup>e</sup> instant, le paramètre  $t_0$  subit une variation,  $\beta$  reste à sa précédente valeur ;
- du 80001<sup>e</sup> au 120000<sup>e</sup> instant, le paramètre  $\beta$  subit une variation,  $t_0$  reste à sa précédente valeur ;
- du 120001<sup>e</sup> au 160000<sup>e</sup> instant, les paramètres  $t_0$  et  $\beta$  subissent une variation.

L'algorithme 3 est appliqué pour chacune des valeurs : les temps de calculs (en seconde) sont respectivement 319.07, 319.15, 317.65, 316.18, 319.41 et 321.81 pour des tailles de fenêtre d'oubli de  $\{1, 2, 5, 10, 20, +\infty\}E\{\Delta|\Theta\}$ . Ceci est en accord avec la complexité de calcul : la taille de la fenêtre n'influe pas sur le temps de calcul.

Nous présentons les estimés des taux de décharge en Figure 6.7. Nous observons que les fenêtres d'oubli courte (bleu et vert foncés) donnent une grande variabilité aux estimés, alors que la fenêtre infinie (jaune) ne permet pas de suivre correctement la variation des paramètres.

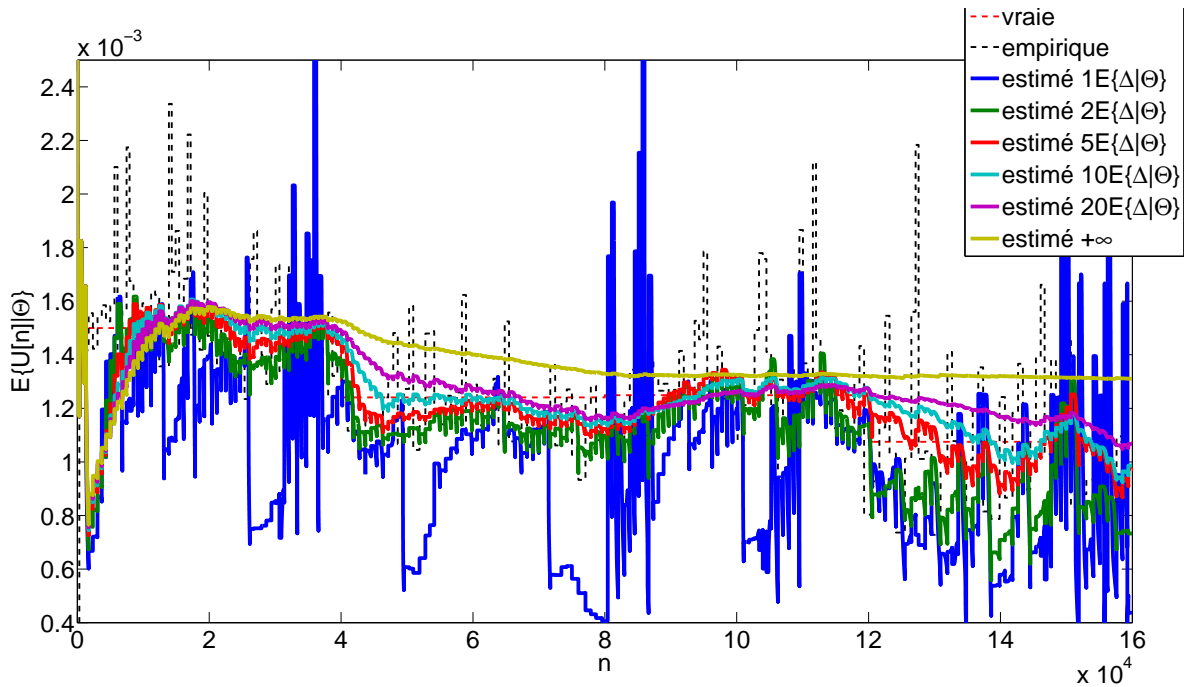


FIGURE 6.7 – Estimé du taux de décharge pour la source du signal avec différents facteurs d'oubli ( $\{1, 2, 5, 10, 20, +\infty\}E\{\Delta|\Theta\}$ ).

Pour la suite de notre étude, nous opterons donc pour des valeurs de fenêtres entre ces deux extrêmes. Les estimés des taux de décharges et des paramètres  $t_0$  et  $\beta$  pour les valeurs de fenêtres d'oubli  $\{5, 10, 20\}$  sont exposés en Figure 6.8 et Figure 6.9 :

Afin de déterminer quelle longueur de fenêtre d'oubli semble la plus adaptée à la déconvolution, nous présentons l'estimation des paramètres de la loi de Weibull discrète en Figure 6.9. Nous observons qu'après



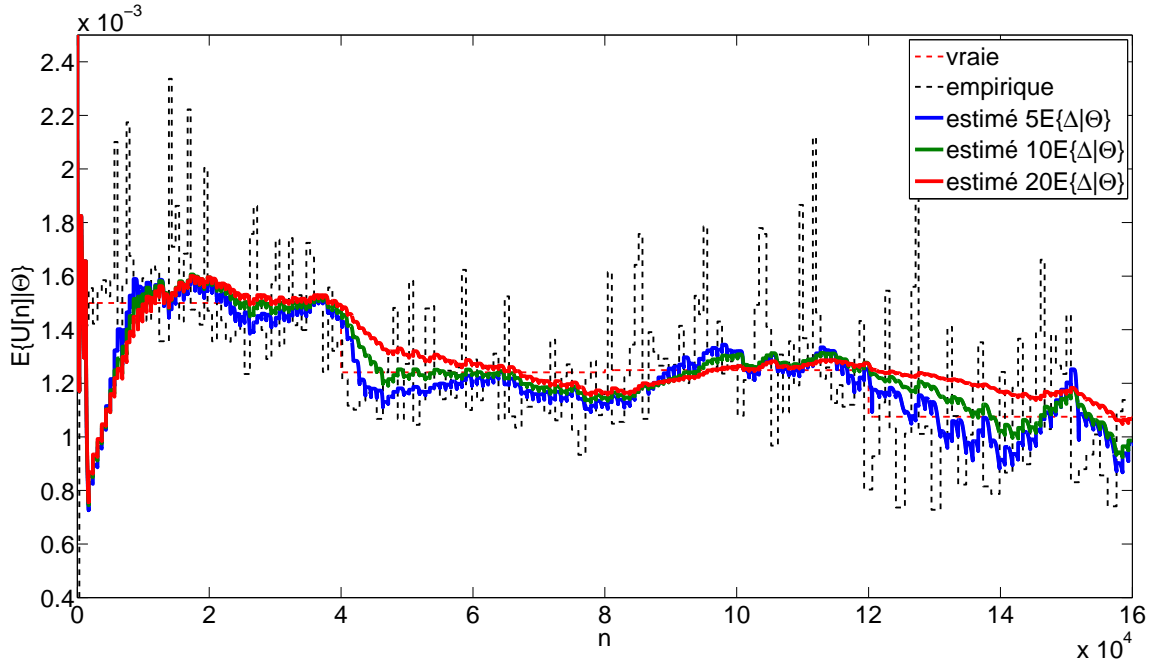


FIGURE 6.8 – Estimé du taux de décharge pour la source du signal avec différents facteurs d’oubli ( $\{5, 10, 20\}E\{\Delta|\Theta\}$ ).

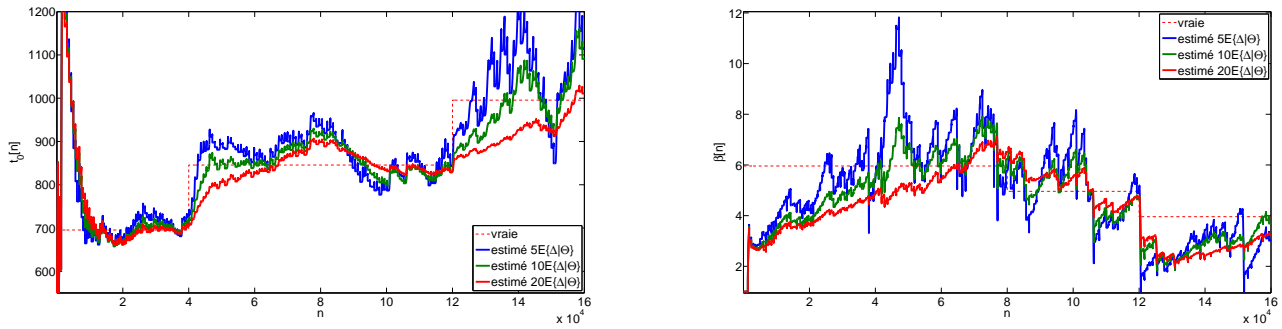


FIGURE 6.9 – Estimé des paramètres  $t_0$  et  $\beta$  pour la source du signal avec différents facteurs d’oubli ( $\{5, 10, 20\}E\{\Delta|\Theta\}$ ).

le changement de valeur de  $t_0$ , l’estimation de  $\beta$  subit une large variation pour une fenêtre de  $5E\{\Delta|\Theta\}$  : ceci s’explique par une forte irrégularité dans l’arrivée des impulsions à cet endroit du signal et donc un abaissement de la valeur de  $\beta$ . Pour le cas de la fenêtre infinie (non-présenté ici), la valeur de  $\beta$  ne change quasiment pas.

À la lumière des résultats obtenus, nous choisissons une fenêtre d’oubli  $\ell_\infty = 10E\{\Delta|\Theta\}$ .

## 6.5 Quatrième étude : nombre de sources non constant

Afin de présenter l’algorithme 3 d’estimation globale à sources inconnues, nous simulons un signal dans le cas nominal avec 3 sources et en fournissant un dictionnaire  $\mathcal{H}$  composé de 4 formes d’ondelettes. La première source n’est active seulement qu’entre les instants 20000 et 60000, la source 3 est inactive et les sources 2 et 4 sont actives durant toute la simulation. Le temps d’inactivation  $t_i$  est choisi égal à 2000 instants, ce qui est de l’ordre de grandeur de deux fois le temps moyen inter-impulsion. D’après les études présentées précédemment, les paramètres de la méthode sont choisis :  $n_s = 64$  et  $\ell_\infty = 10E\{\Delta|\Theta\} \approx 7500$ .

L’estimé du signal, présenté en haut de la Figure 6.10, est proche du signal estimé. L’estimation globale

est satisfaisante. Nous notons que l'estimation de l'ondelette de plus large amplitude (source 1) est d'abord sous-estimée vers l'instant 20000 puis est estimée correctement (grâce au filtre de Kalman) au bout d'une dizaine d'impulsions, vers l'instant 30000. De plus, des apparitions sporadiques de l'ondelette associée à la source 1 apparaissent : des propositions d'activation de la source sont réalisées et validées pendant quelques instants, puis l'algorithme inactive cette source car elle n'émet pas d'ondelettes. En bas de la Figure 6.10,

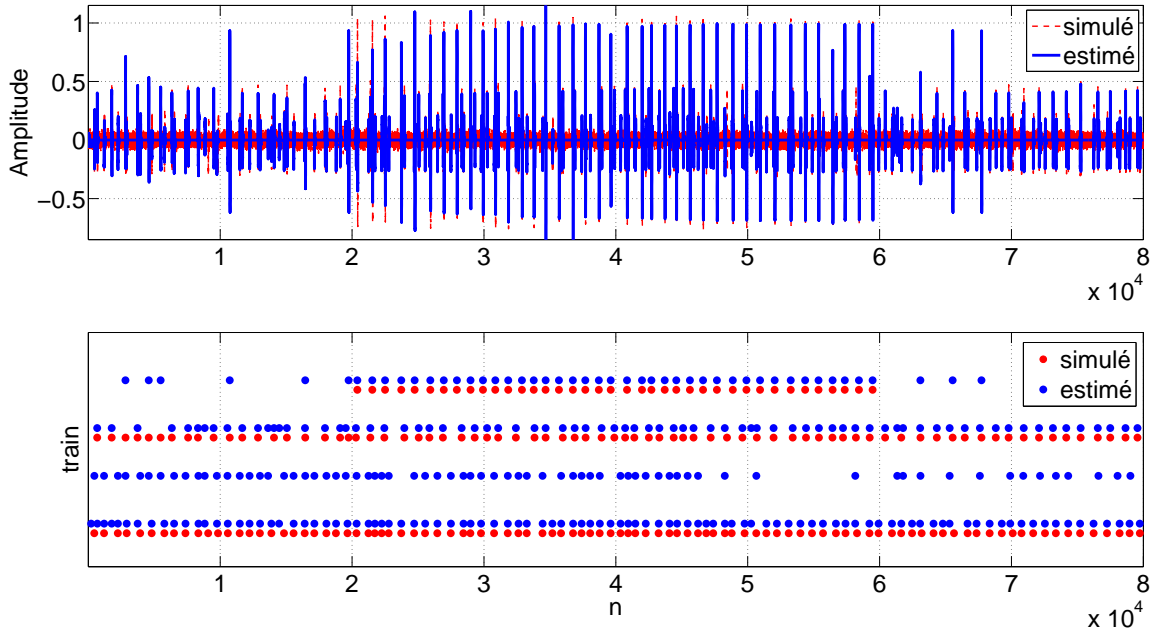


FIGURE 6.10 – Estimés du signal, de la meilleure séquence *a posteriori* et des ondelettes (initiale, estimée et la vraie), pour un signal avec un nombre de sources variables.

nous montrons l'estimateur du maximum *a posteriori* des trains d'impulsions. Ils sont bien reconstruits pour les sources 1, 2 et 4 dans les zones où ces sources sont actives. Notons un échange entre les sources 1 et 2, puis les sources 1 et 4 aux instants respectifs 5000 et 65000 : la forme des ondelettes peut expliquer ces mauvaises orientations, l'estimation est reprise correctement après une ou deux impulsions. La source 3 ne devrait pas être activée : nous notons une forte corrélation entre les instants d'impulsions de la source 3 et de la source 4.

L'estimation de l'ondelette de la source 3 est exposée en Figure 6.11 : elle est quasi-nulle. De plus, les ondelettes des sources 1, 2 et 4 (séparée en deux morceaux) sont estimées de façon satisfaisante.

Nous présentons à des fins de vérifications les estimés des paramètres des lois de Weibull discrètes (Figure 6.12) et des taux de décharge (Figure 6.13). À l'instar des trains d'impulsions, les paramètres  $t_0$  sont correctement estimés après quelques impulsions d'une source active. Le paramètre  $\beta$  apparaît sous-estimé pour les sources 2 et 4 : ce paramètre plus sensible subit les nombreuses perturbations introduites par la source 3. Par ailleurs, les taux de décharges (Figure 6.13) restent stables comme dans les études précédentes.

## 6.6 Discussion

Les résultats sont très satisfaisants pour l'algorithme 2. Les estimations des trains et des paramètres s'effectuent correctement et en l'espace d'une dizaine d'impulsions. Les estimateurs adaptatifs donnent des résultats satisfaisants lors de la variation des paramètres des lois de Weibull discrètes. Rappelons que l'utilisation des fenêtres courtes est intéressante si la détection de variations dans les paramètres est un objectif de la méthode. Nous avons appliqué cet algorithme sans l'étape du filtre de Kalman et en fournissant les

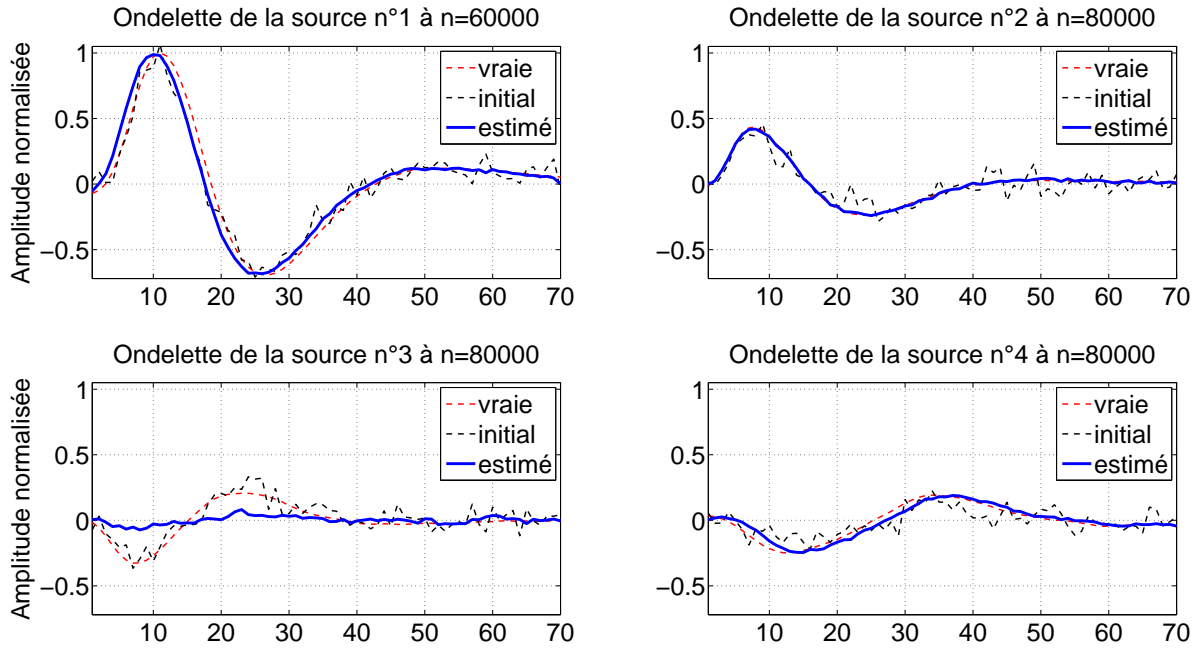


FIGURE 6.11 – Estimés du signal, de la meilleure séquence *a posteriori* et des ondelettes (initiale, estimée et la vraie), pour un signal avec un nombre de sources variables.

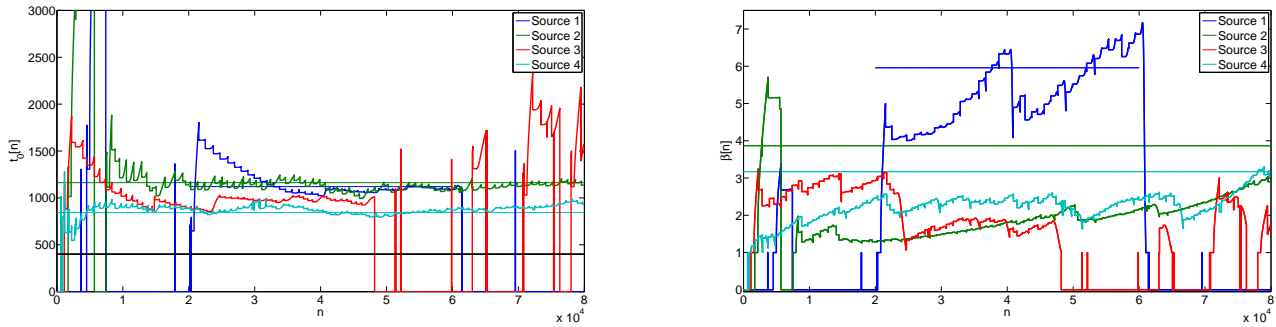


FIGURE 6.12 – Estimés des paramètres  $t_0$  et  $\beta$  pour un signal avec un nombre de sources variables.

ondelettes de simulation exactes pour l'initialisation des ondelettes  $\hat{H}_{t_1}^{l_0}$  (dans un signal avec 4 sources) : les trains sont retrouvés parfaitement et le traitement est réalisé en 700 secondes (pour 64 séquences retenues). L'utilisation d'un filtre de Kalman dégradé permettrait d'améliorer les performances de la méthode en dépit d'une moins bonne estimation : à nouveau un compromis entre temps de calcul et bonne estimation doit être trouvé.

Le modèle derrière l'algorithme 2 ne prend pas en compte la variation du nombre de sources, *a contrario* de l'algorithme 3 : les premiers résultats nous satisfont. Après analyse des résultats, les estimations du signal, des trains d'impulsions et des paramètres sont correctes. Nous pouvons choisir de raffiner le modèle de transition de l'état, par exemple, en supprimant les ondelettes de trop faibles amplitudes, ou encore en réinitialisant les paramètres de la loi de Weibull discrète pour un changement de valeurs trop brusque. Nous pouvons aussi proposer une étape de post-traitement qui détecterait, par exemple, les sources non-indépendantes.

Nous avons réalisé une simulation avec un faible nombre d'ondelettes dans le dictionnaire. Le fait d'augmenter sa taille augmente les indéterminations (observées en Figure 6.10) : nous pouvons choisir de retenir un nombre  $n_s$  plus important de séquences ou de réaliser une étape de post-traitement des informations obtenues.

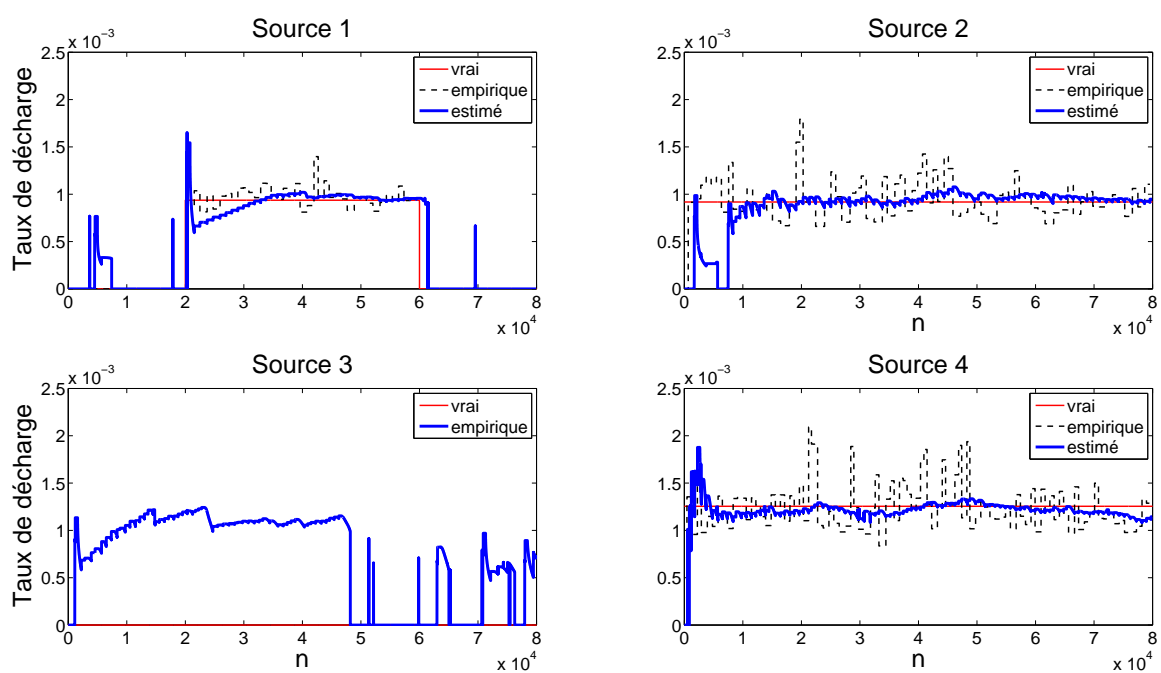


FIGURE 6.13 – Taux de décharges associés pour un signal avec un nombre de sources variables.

## Expérimentation sur des signaux iEMG

Le chapitre 6 précédent nous a permis de montrer la bonne estimation en général des paramètres du modèle (4.1) et (4.2) par l'algorithme 2, ainsi que d'évaluer l'influence des paramètres  $\ell_\infty$  et  $n_s$ , paramètres de la méthode. Nous avons pu observer les résultats obtenus par l'application de l'algorithme 3 sur un signal avec un nombre de sources variables modélisé par les lois de transitions de l'état du paragraphe « Transition » (section 5.1) et la loi d'observation (5.4). Les résultats étaient concluants même si des améliorations sont à réaliser.

Dans ce chapitre, nous faisons la description de l'obtention des signaux expérimentaux sur un muscle de l'avant-bras et nous présentons et expliquons les résultats obtenus après application des algorithmes 2 et 3 sur les signaux iEMG. Nous exécuterons les deux algorithmes sur une même partie de signal iEMG où les sources sont connues et constantes, puis nous appliquerons le second algorithme à une partie de signal iEMG où le nombre de sources est variable.

### 7.1 Obtention des signaux iEMG

#### 7.1.1 Dispositif expérimental

Les signaux iEMG présentés dans ce manuscrit ont été fournis par le département de Neurorehabilitation Engineering, au Bernstein Center for Computational Neuroscience, centre de recherche au sein de l'University Medical Center Göttingen Georg-August University, en Allemagne.

**Électrodes** L'acquisition des signaux iEMG se fait grâce à des électrodes intramusculaires présentées dans la Figure 7.1 à gauche. Deux paires d'électrodes sont implantées simultanément afin d'augmenter les chances d'acquisition de signaux iEMG exploitables. Ces électrodes sont faites d'acier inoxydable enrobé de Téflon (A-M Systems, Carlsborg, WA, USA ; diamètre  $50\mu\text{m}$ ) et sont introduites à l'aide d'une seringue hypodermique. Les signaux sont récupérés et amplifiés de façon bipolaire par une boîte d'acquisition (Counterpoint EMG, DANTEC Medical Skovlunde, Danemark), puis filtrés par un filtre passe-bande (500Hz-5kHz). La fréquence d'échantillonnage est de 10kHz. Le montage complet est visible dans la Figure 7.1 à droite.

**Expérimentation** Durant l'acquisition des signaux, le sujet a un retour visuel de la force et des signaux iEMG qu'il produit. Au début de l'acquisition, le sujet accomplit deux contractions au maximum de sa force à des fins de calibrage. Cette donnée de référence est appelée contraction volontaire maximale (MVC).

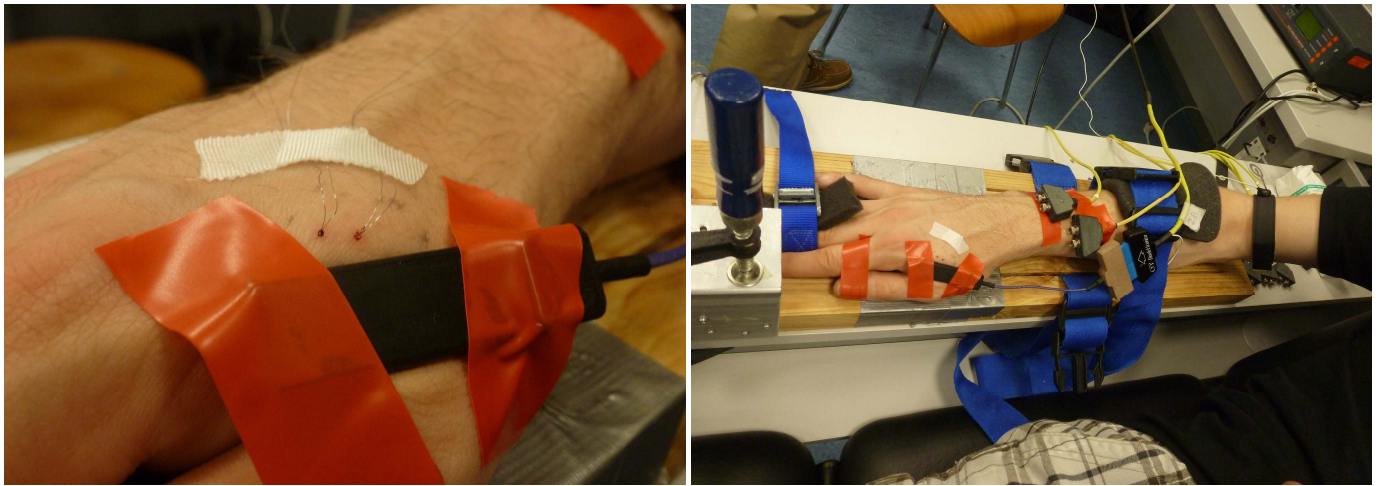


FIGURE 7.1 – Montage expérimental. À gauche, les électrodes intramusculaires ; à droite, une vue d'ensemble du dispositif de relevé.

La MVC est caractérisée par un iEMG formé de nombreux trains d'impulsions superposés. Puis le sujet effectue des contractions isométriques (sans changement de la géométrie du muscle) à des niveaux compris entre 5% et 10% de sa MVC, c'est-à-dire à un faible niveau de force.

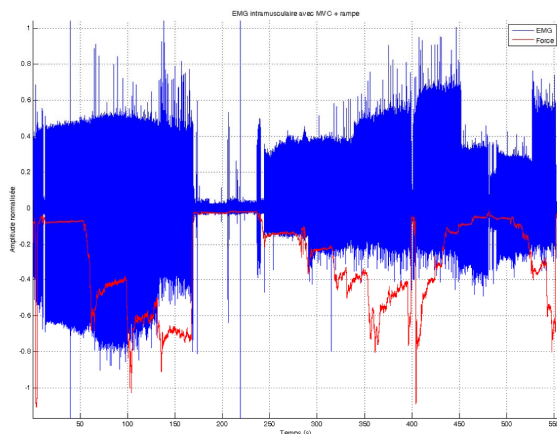


FIGURE 7.2 – La fenêtre de retour visuel (gauche) et un exemple de signal iEMG enregistré avec la force développée (droite).

Une interface graphique a été réalisée sous MATLAB (Figure 7.2 à droite) par l'équipe du département. Elle permet à l'expérimentateur de visualiser et d'enregistrer les essais réalisés par le sujet.

### 7.1.2 Prétraitements des signaux iEMG

**Filtrage** Les signaux sont perturbés par de nombreux bruits : mouvements des électrodes, changements physiologiques, bruit de capteurs, bruit de l'amplificateur, *etc.* L'analyse spectrale de signaux iEMG, présentée dans la Figure 7.3, révèle une forte amplitude en 50Hz, mais aussi des composantes autour de 3,3kHz. Nous filtrons le signal par un filtre passe-bas à partir de 2,5kHz (55dB d'atténuation sur la bande 2,5-3kHz, fenêtre de Hamming) et par un filtre passe haut jusqu'à 0,1kHz (55dB d'atténuation sur la bande 0-0,1kHz, fenêtre de Hamming).

**Déconvolution manuelle** Un expert en déconvolution de signaux iEMG, assisté du logiciel EMGLab, estime le nombre de sources sur certains morceaux du signal iEMG et extrait une ondelette pour chaque



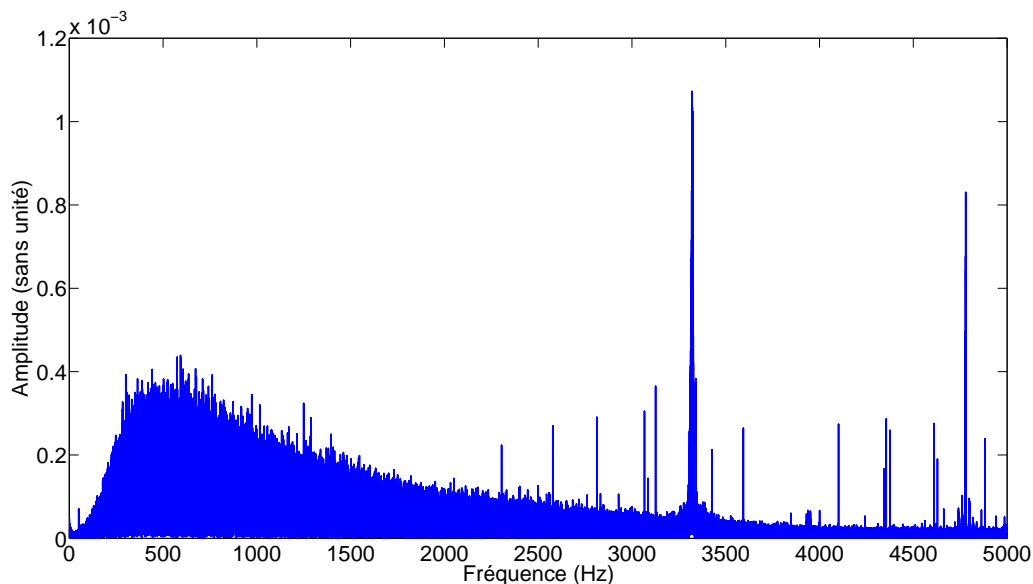


FIGURE 7.3 – Transformée de Fourier entre 0 et 5kHz d'un signal iEMG échantillonné à 10kHz.

source trouvée. Les ondelettes extraites de cette manière alimentent la base de forme mentionnée  $\mathcal{H}$  dans nos algorithmes. L'expert met aussi à disposition une estimation des instants de décharges pour chaque source : ils nous serviront *a posteriori* pour comparer et valider nos algorithmes. Nous rappelons que ces instants ne sont pas nécessaires à notre méthode et que nous les enregistrons à des seules fins de validation et de présentation.

## 7.2 Expérimentations et résultats

### 7.2.1 Estimation à sources connues et constantes

Le signal, présenté Figure 7.4, a été filtré suivant la méthode de la section précédente. Le rapport SNR est de 11dB. Ce signal iEMG obtenu est caractéristique d'un signal à MVC faible. Nous traitons une portion de signal équivalent à 8 secondes de signal échantillonné à 10kHz (soit 80000 pas). L'expert identifie quatre trains d'ondelettes ( $\ell_{RI} = 80$ ). Deux ondelettes sont similaires en forme et en amplitude. Le temps réfractaire observé est de 45ms (valeur plus élevée que les données physiologiques attendues). Le réglage des paramètres de la méthode donne un nombre de séquences retenues  $n_s = 64$  et une longueur de fenêtre d'oubli  $\ell_\infty \approx 1s$ .

L'algorithme est exécuté en 13600 secondes. Nous présentons l'estimation du signal et des trains d'impulsions en Figure 7.5 : le signal est correctement estimé sur toute la durée du signal ainsi que les trains d'impulsions. Nous pouvons remarquer que notre algorithme a oublié une impulsion vers 7.74s : il a déjà proposé une impulsion de la source correspondante vers 7.71s. Il ne peut donc pas proposer une nouvelle impulsion avant la fin de la période réfractaire (vers 7.75s). Il s'agit du phénomène de doubles impulsions, non pris en compte dans le modèle. L'expert estime, quant à lui, une unique impulsion vers 7.73s : les deux reconstructions sont de très bonnes candidates pour expliquer le signal iEMG.

De plus, nous notons qu'un échange entre les sources 3 et 4 s'effectue souvent : les deux formes sont similaires, comme nous pouvons le voir en Figure 7.6. Nous observons une évolution lente dans la forme des ondelettes entre le début et la fin du signal analysé.

Notre algorithme permet aussi de trouver les taux de décharge (voir Figure 7.7) des quatre sources à partir des estimés des paramètres des lois de Weibull discrètes. Le taux de décharge de chaque source converge vers leur valeur finale au bout d'une seconde et demie ; elles sont stables ensuite. Nous remarquons que les taux de hasard estimés sont en accord avec la déconvolution de l'expert (trait en pointillé noir sur la

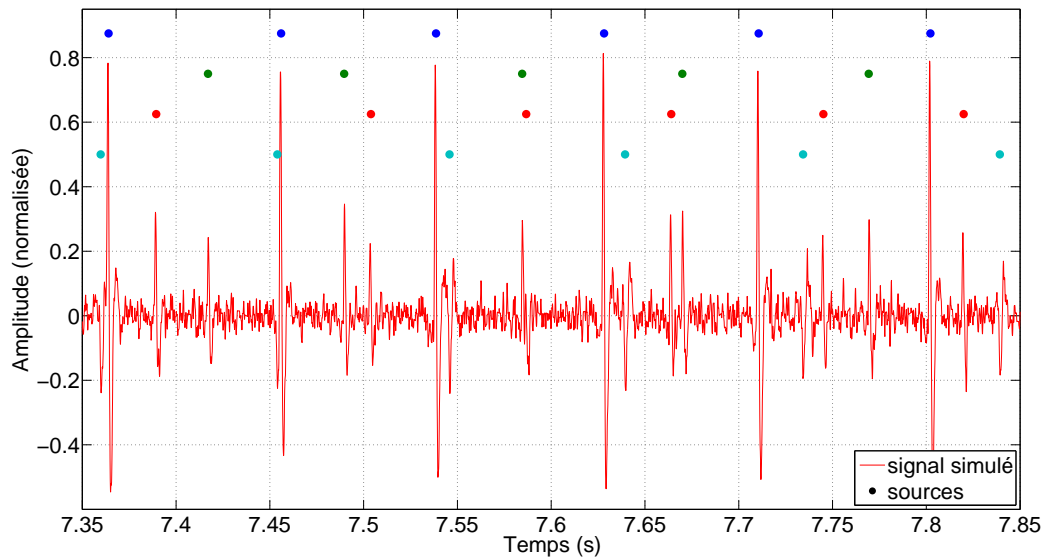


FIGURE 7.4 – Partie d’un signal iEMG entre 7.35 s et 7.85 s, relevé sur un muscle de l’avant-bras et filtré par un passe-bas à 2,5kHz et un passe-haut à 0,1kHz

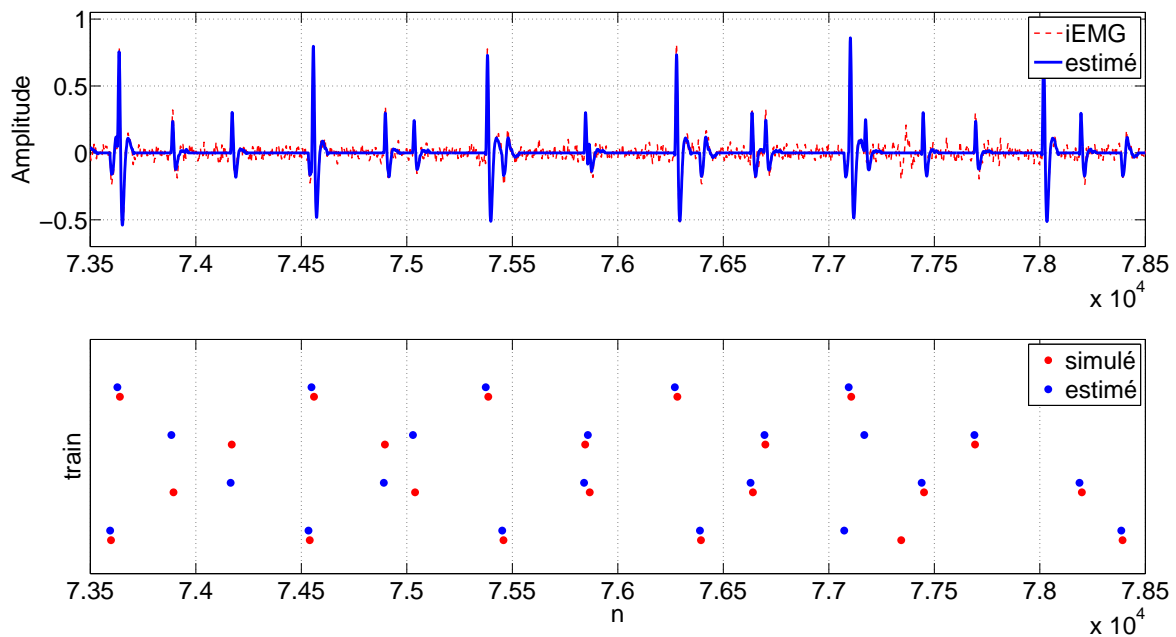


FIGURE 7.5 – Estimés du signal, de la meilleure séquence *a posteriori* pour un signal avec un nombre de sources constantes et connues.

Figure 7.7, représentant l’inverse du temps inter-impulsion).

Cependant, les paramètres  $t_0$  et  $\beta$  mettent plus de temps à converger (voir Figure 7.8). Les valeurs faibles de  $\beta$  pour trois sources sur les quatre présentes montrent une certaine irrégularité dans l’arrivée des impulsions. 7.7). Nous remarquons que le taux de décharge pour la source 4 est plus élevé que celui estimé par l’expert : cette ondelette est de faible amplitude et donc peut passer inaperçue lors des interférences. Notre algorithme permet de la localiser de façon automatisée grâce au modèle des temps inter-impulsions.



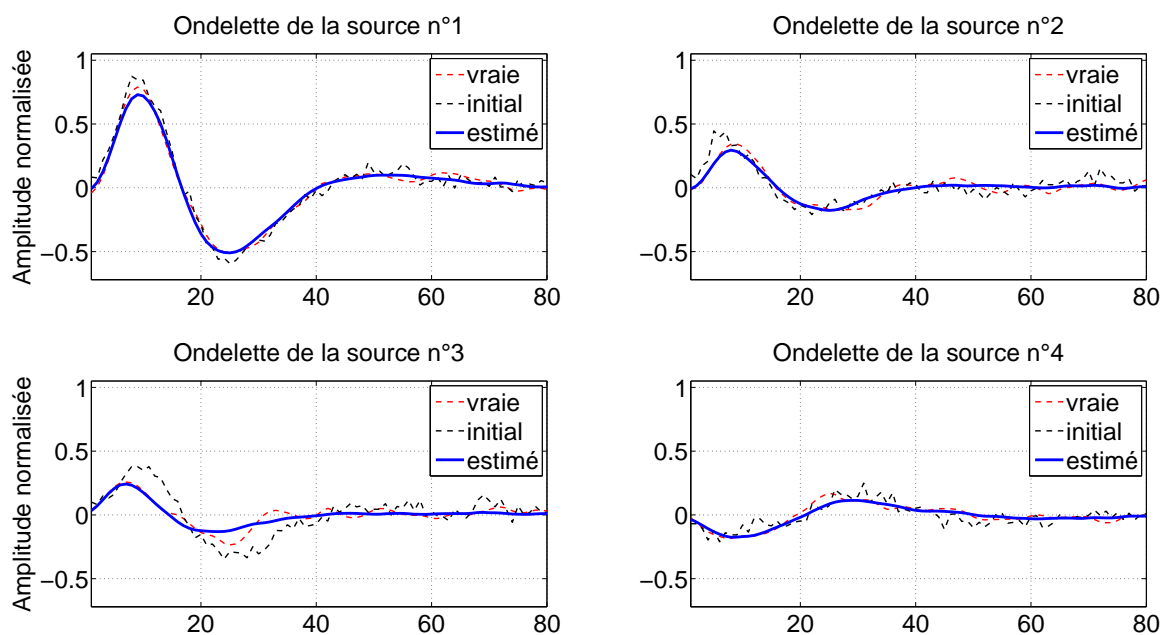


FIGURE 7.6 – Ondelettes (initiale, estimée et l’extraite par l’expert) pour un signal avec un nombre de sources constantes.

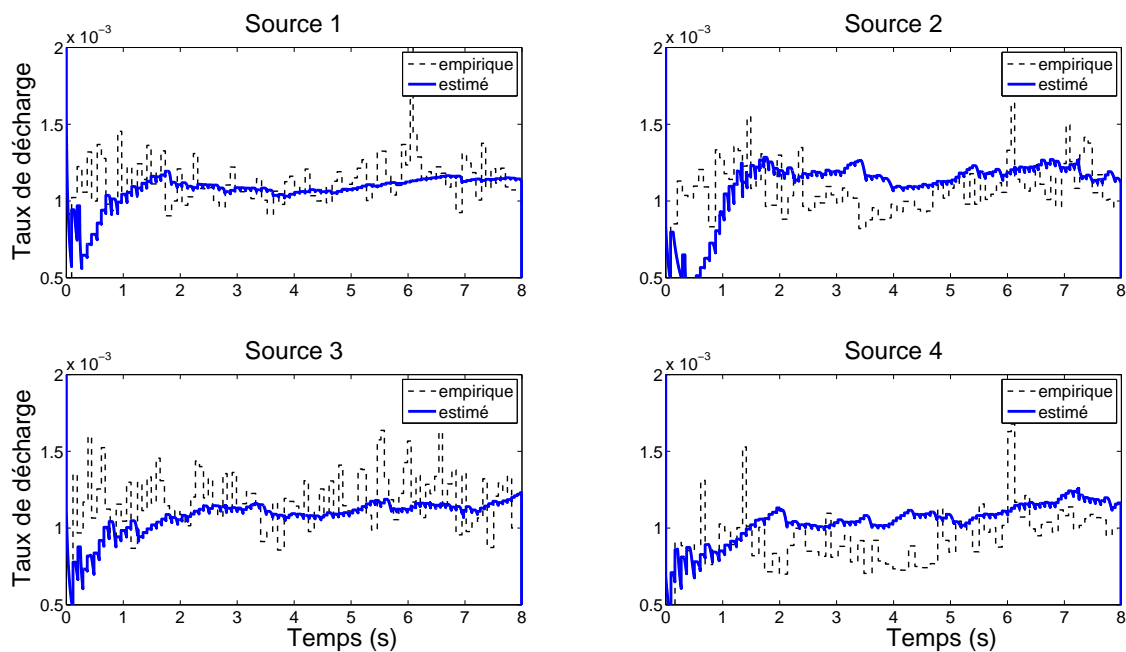


FIGURE 7.7 – Taux de décharges estimés (en impulsions/seconde) d’un signal iEMG avec 4 sources connues.

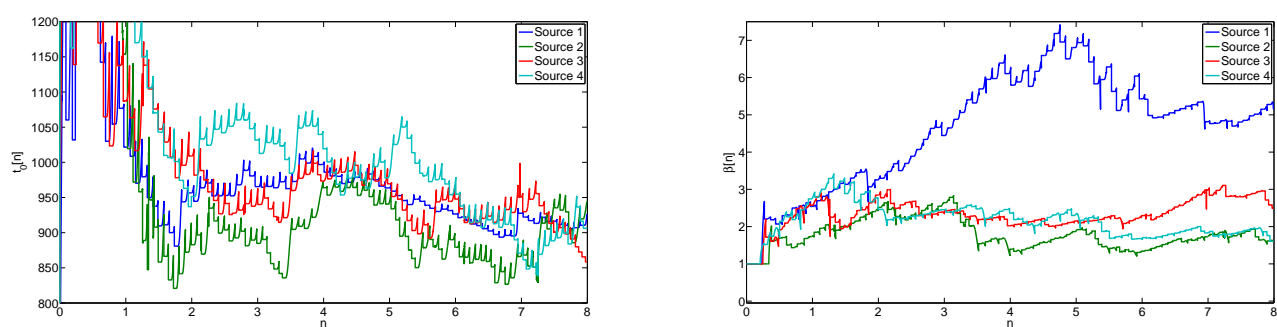


FIGURE 7.8 – Estimé des paramètres  $t_0$  (à gauche) et  $\beta$  (à droite) d'un signal iEMG avec 4 sources connues.

### 7.2.2 Estimation à nombre de sources inconnues et constantes

Nous appliquons l'algorithme 3 sur le même signal : les mêmes valeurs de paramètres que dans la section précédente sont prises et le dictionnaire fourni est composé de 5 formes d'ondelettes.

La déconvolution est satisfaisante après quelques impulsions (mise en place de l'estimation des différentes ondelettes et de l'estimation initiales des paramètres des lois de Weibull discrètes). Elle est réalisée en 8350 secondes. Sur la Figure 7.9, nous observons que vers 7.36s, l'ondelette de la source 5 est proposée (elle ne fait pas partie du signal) et vient perturber la bonne estimation du signal. Cependant, l'algorithme détecte bien qu'elle ne fait pas partie du signal et l'inactive rapidement. Les trains reconstruits par notre méthode et ceux de l'expert sont proches : quelques inversions apparaissent entre les sources 2 et 3. La quatrième

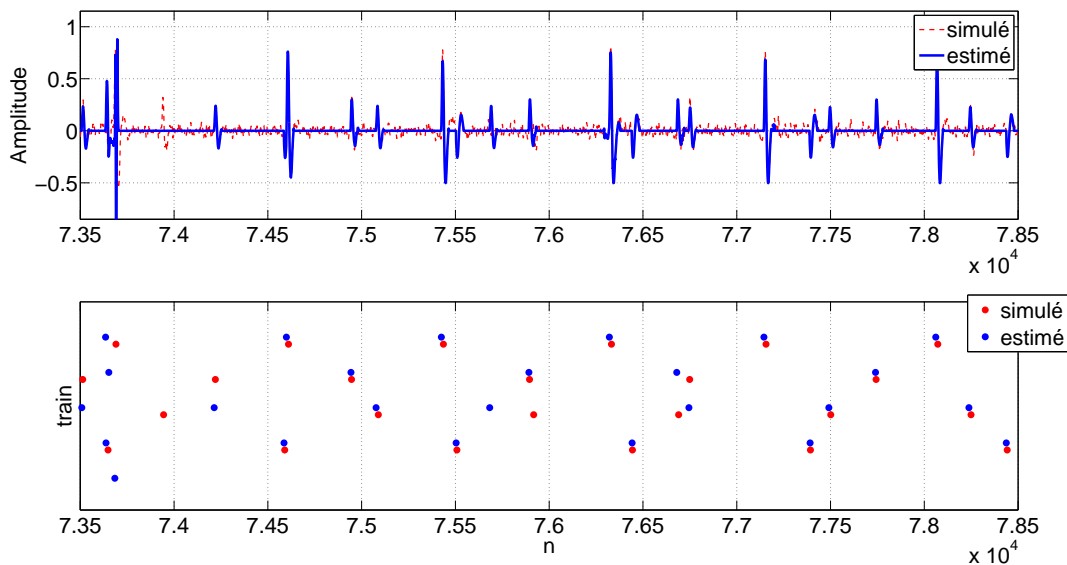


FIGURE 7.9 – Estimé du signal, avec la meilleure séquence *a posteriori* pour un signal avec un nombre de sources constantes mais non connues.

ondelette est d'amplitude faible en comparaison avec le niveau de bruit. Nous montrons sa bonne estimation en Figure 7.10. Les formes initiales étaient assez éloignées des formes finales : la méthode d'estimation des ondelettes présente des résultats satisfaisants.

Nous présentons les taux de décharge pour les quatre sources réellement actives : l'activité de la 5e source potentielle se révèle être anecdotique (5 occurrences sur toute la durée du signal). L'estimé du taux de décharge pour la source 1 est en accord avec les estimations des temps inter-impulsions de l'expert. Pour les sources 2 et 3, les nombreuses inversions entre ces deux formes perturbent l'estimation correcte du taux de décharge : les estimés des taux de décharges pris simultanément sont en accord avec les estimations de l'expert. La source 4 présente une discontinuité autour de 2.56s : une interférence entre les ondelettes des sources 2,3 et 4 est présente à ce moment et notre algorithme propose une impulsion provenant de la 5e source, ce qui l'entraîne dans une mauvaise direction. Cependant, l'algorithme converge à nouveau vers l'estimation de l'expert en 3 secondes.

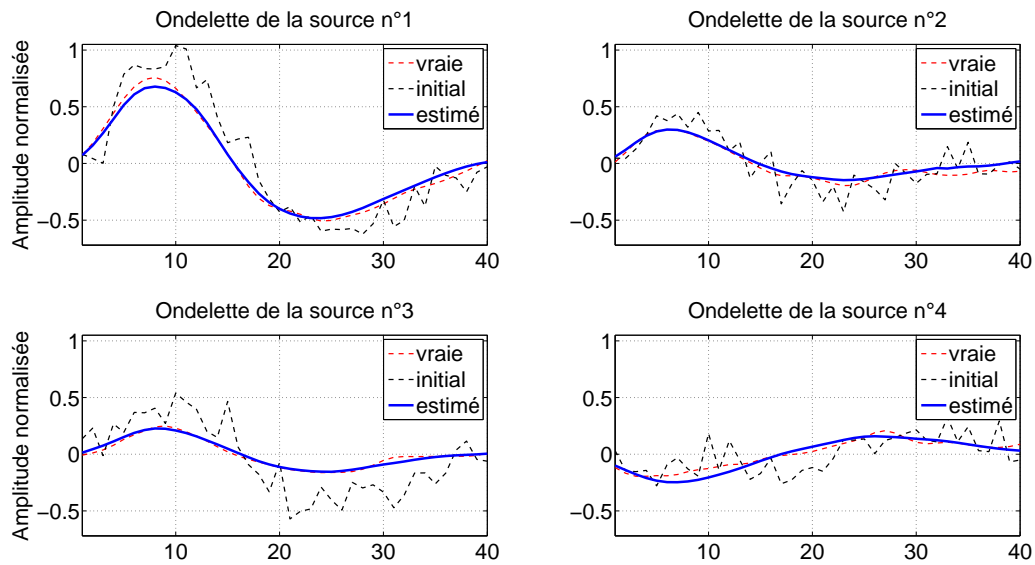


FIGURE 7.10 – Ondelettes (initiale, estimée et la vraie), pour un signal avec un nombre de sources constantes mais non connues.

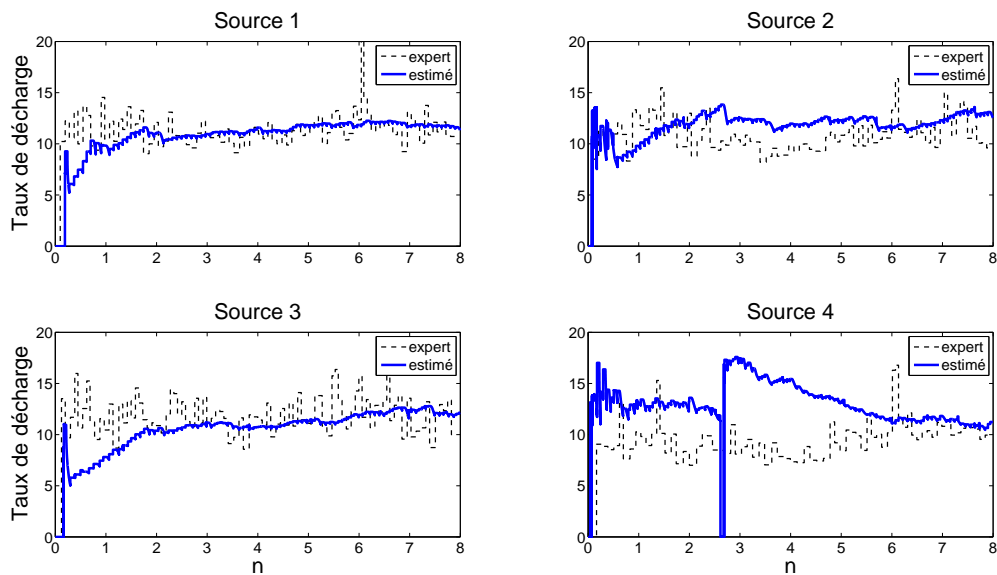


FIGURE 7.11 – Taux de décharges estimés (en impulsions/secones) d'un signal iEMG avec 4 sources parmi un dictionnaire contenant 5 ondelettes.

### 7.2.3 Estimation à nombre de sources inconnues et non-constantes

Dans cet exemple, nous appliquons le même algorithme que précédemment sur un signal iEMG où le nombre de source varie (voir Figure 7.12). Un expert estime le nombre de sources différentes à 3. Nous fournissons le même dictionnaire d'ondelettes.

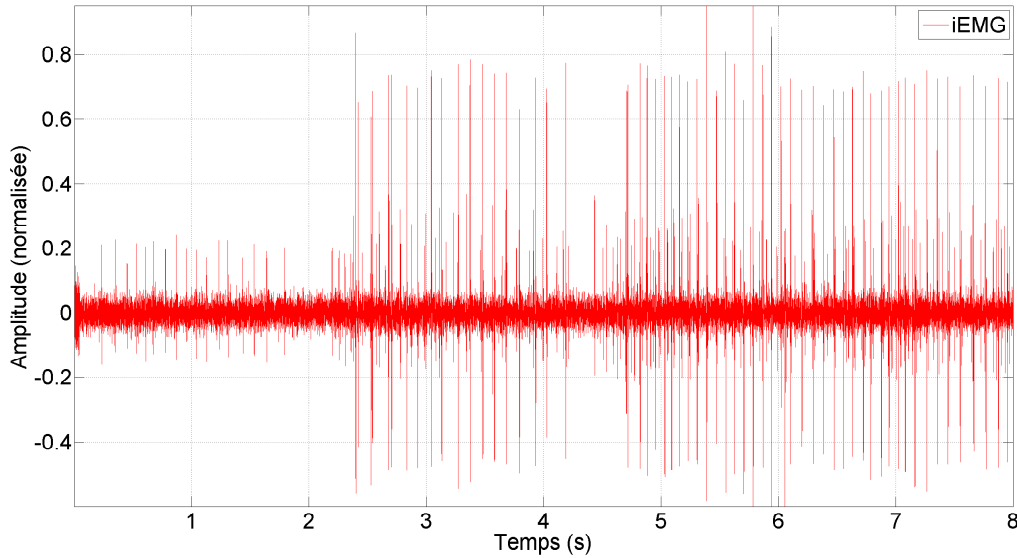


FIGURE 7.12 – Signal iEMG avec un nombre de sources non constant et sources non connues.

Nous présentons le résultat de la déconvolution aveugle dans le haut de la Figure 7.13. Dans le bas de cette figure, l'estimateur du maximum *a posteriori* des séquences d'impulsions est présenté : nous remarquons la présence de quatre trains d'impulsions. Nous pouvons voir les estimés des ondelettes en Figure 7.14 : l'ondelette qui correspond au quatrième train d'impulsions est quasi-nulle. Notre méthode ne prend pas en compte ce type d'événement : nous devons affiner les lois de transitions du modèle de Markov caché.

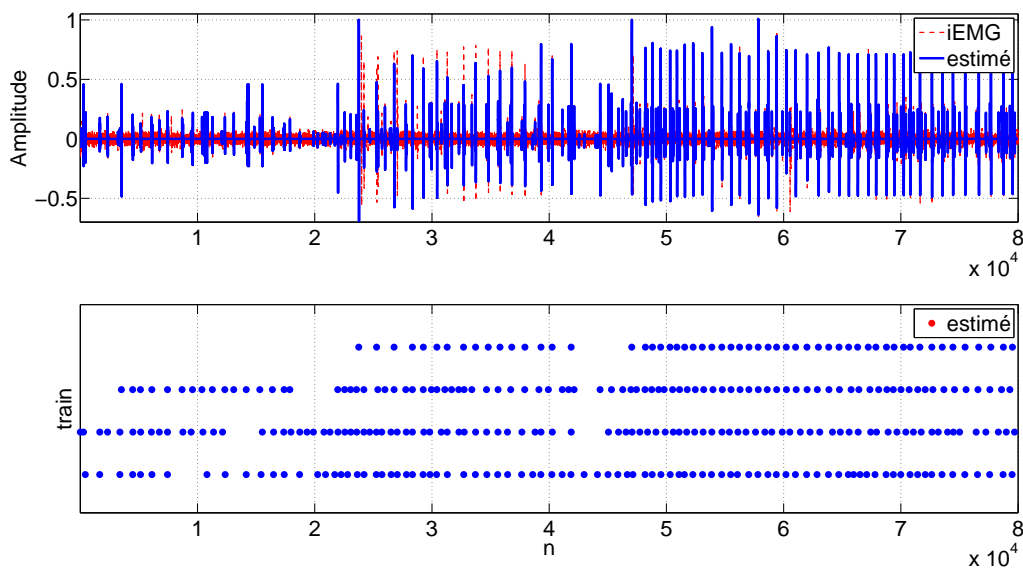


FIGURE 7.13 – Estimé du signal, avec la meilleure séquence *a posteriori* pour un signal avec un nombre de sources non constant et sources non connues.

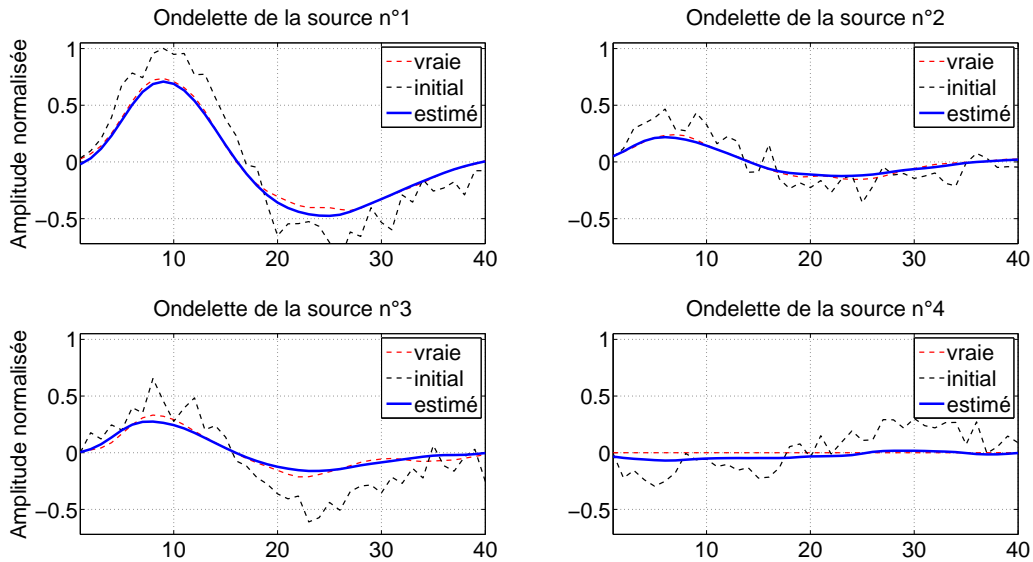


FIGURE 7.14 – Ondelettes (initiale, estimée et la vraie) avec un nombre de sources non constant et sources non connues.

Les estimés des taux de décharge permettent de confirmer la mauvaise direction prise par l'algorithme dans la proposition d'un quatrième train d'ondelettes : aucune impulsion n'est présente autour de 4.3s, pourtant le quatrième train d'impulsions n'est pas inactivé lors de cette période. Nous remarquons à nouveau la stabilité des taux de décharge dans des plages de valeurs de 10 à 12 impulsions par secondes.

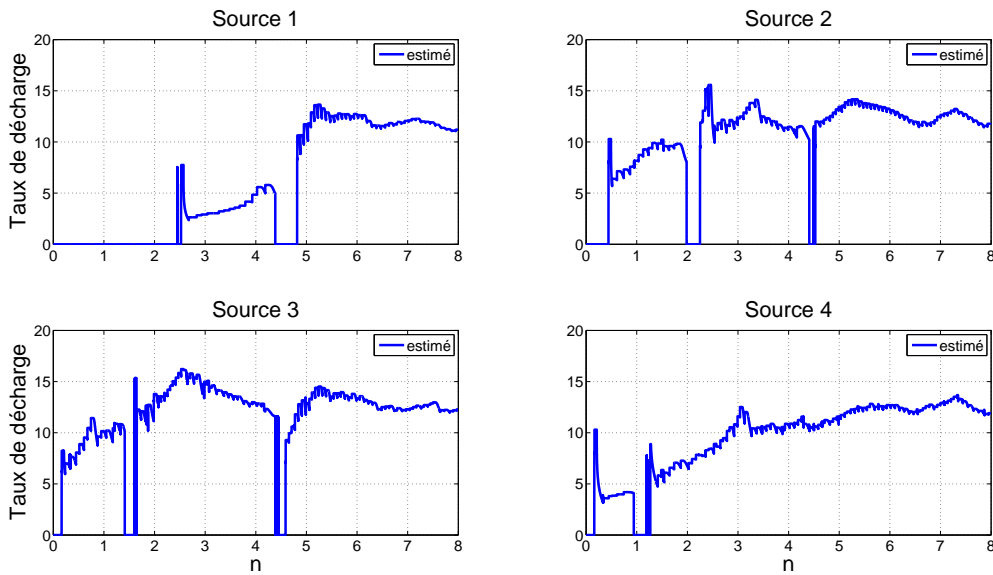


FIGURE 7.15 – Taux de décharges estimés (en impulsions/seconde) d'un signal iEMG avec un nombre de sources non constant et sources non connues.

## 7.3 Discussion

Dans le cas d'un nombre de sources connues, la modélisation proposée convient aux données réelles : les estimations des paramètres sont satisfaisantes. L'évolution de la forme des ondelettes et les variations des taux de décharge justifient *a posteriori* la mise en place d'un facteur d'oubli dans notre algorithme.

Dans le cas de sources inconnues et constantes, nos estimations sont en accord avec celles de l'expert.

Dans le cas de sources inconnues et non constantes, notre algorithme réussit en partie la déconvolution. Nous avons vu que l'ajout d'une ondelette au dictionnaire, ondelette qui n'apparaît pas dans le signal iEMG, perturbe régulièrement la déconvolution en aveugle. Cependant, l'algorithme converge à nouveau après quelques impulsions vers les mêmes estimations que celles proposées par un expert. Une étape de post-traitement est nécessaire afin d'assurer la bonne déconvolution. Une stratégie de proposition d'impulsions différente peut être envisagée : actuellement, nous proposons toutes les possibilités à chaque instant, ce qui laisse une grande liberté au système. Nous pourrions structurer simplement celui-ci en autorisant seulement la proposition d'une impulsion à la fois. Ces dégradations nous font perdre le caractère bayésien de l'estimation, mais elles permettent d'améliorer les temps de calcul.

Par ailleurs, plutôt qu'une étape de post-traitement des données et afin de rester dans le cadre de l'estimation bayésienne, nous pouvons raffiner le modèle, notamment avec des propositions de lois de transition plus en accord avec la réalité pour les ondelettes et les paramètres des lois de Weibull discrètes.





# Conclusion

## Résultats et apports

La volonté de piloter une prothèse d'avant-bras et la commande physiologique des muscles par le système nerveux central (chapitre 2) nous ont orientés vers la modélisation des signaux iEMG par un modèle de Markov caché (modèle paramétrique). Nous estimons en ligne des paramètres du modèle afin d'extraire des informations des signaux et les fournir à la commande de la prothèse.

Dans ce manuscrit, nous avons modélisé un signal iEMG comme un processus stochastique. Nous avons proposé une modélisation d'un train d'impulsions parcimonieux (chapitre 3) : la loi de Weibull discrète de type I à deux paramètres a été retenue pour la masse de probabilité du temps inter-impulsion. L'estimation en ligne des paramètres de la loi de Weibull discrète a été présentée. Puis, nous avons modélisé la somme d'un nombre connu de trains d'impulsions convolués par leur ondelette respective (chapitre 4). Ce modèle global du signal s'appuie sur le modèle du train d'impulsions. L'estimation conjointe des ondelettes et des paramètres des lois de Weibull discrètes a conduit à l'algorithme 2. Finalement, nous avons proposé une modélisation des sources actives, variables importantes du système étudié (chapitre 5) : un deuxième algorithme (l'algorithme 3) permet d'estimer par une approche probabiliste le nombre de ces variables.

Nous avons vérifié le bon fonctionnement de nos algorithmes sur des données simulées (chapitre 6) : ces données ont été simulées avec l'objectif de ressembler le plus possible à des signaux iEMG. L'estimation des différents paramètres du système est donnée pour plusieurs valeurs de paramètres des méthodes proposées. Ainsi, nous avons pu appliquer nos algorithmes sur des signaux réels (chapitre 7). Les résultats ont été comparés avec ceux obtenus par un expert assisté du logiciel EMGLab.

Finalement une discussion montre les apports et les limitations de notre méthode : l'estimation par un filtre bayésien permet de donner des estimateurs *a posteriori* de façon objective comparée à un expert humain ; cependant la modélisation et les ressources en calcul limitent la prise en compte de tous les phénomènes.

## Perspectives

Le travail proposé dans ce manuscrit est une première étape vers le pilotage d'une prothèse d'avant-bras.

Le premier axe de recherche est celui d'une meilleure modélisation du système considéré : dans les signaux iEMG, il apparaît des doubles décharges (deux impulsions issues d'un même train en moins d'une période réfractaire, ce qui est normalement physiologiquement impossible) ; la modélisation du schéma d'activation des sources peut être raffinée ; l'hypothèse d'indépendance des sources doit être étudiée. De plus, l'information extractible du signal doit être quantifiée : la déconvolution d'un signal trop riche en train d'impulsions peut s'avérer difficile. Une solution proposée est l'étude simultanée de plusieurs relevés d'iEMG sur un même muscle afin d'obtenir une bonne estimation de l'activité musculaire.

Le deuxième axe de recherche est l'implémentation des algorithmes proposés sur un GPU. Nous pouvons paralléliser les calculs pour chaque état retenu, ainsi que pour chaque source dans l'étape de prédiction : le temps de calcul serait réduit et permettrait de maximiser le nombre de séquences retenues (suivant la capacité de calcul du processeur). Aussi, une étape de prétraitement automatique des signaux doit être mise en place. Une étape de post-traitement des résultats obtenus par l'algorithme est aussi nécessaire :

détection de changement de mode, détection de sources non-indépendantes, calibration automatique, ré-initialisation de l'algorithme, mise à jour de la base de données des ondelettes. Ces événements ne sont pas pris en compte dans la modélisation, ils dépendent de paramètres internes à la méthode.

Un troisième axe de recherche est l'établissement d'une méthode de traduction des informations obtenues (les taux de décharges des différentes sources actives) en instruction pour le pilotage des muscles artificiels de la prothèse (conjointement à la conception de la prothèse). La traduction doit tenir compte correctement de la différence structurelle entre le patient et la prothèse robotisée afin d'obtenir le mouvement ou la force désirée. La prothèse intégrera le fait que plusieurs degrés de liberté pourront être activés simultanément et les pilotera de façon proportionnée.

Un quatrième axe de recherche est l'étude de la physiologie des muscles du corps humain ou l'aide à la rééducation fonctionnelle. Une discussion avec le corps médical doit être menée sur l'intérêt et l'interprétation des informations extraites. Ainsi, les paramètres de la méthode, tels que le temps réfractaire, le taux d'activation ou le temps d'inactivation, pourraient être évalués sur une cohorte de sujets afin de fournir des valeurs physiologiques. Finalement, la méthode d'estimation en ligne des paramètres d'une loi de Weibull discrète peut être utilisée afin de prévoir les taux de décharges de n'importe quel système, à la condition qu'une modélisation discrète soit envisageable (pannes, réparations, arrivée de client, *etc.*).

# Annexes

## A Preuves de la propriété 1 : chaîne de Markov

- Considérons un instant  $n$  entre la  $N$ -ième impulsion au temps  $I[N]$  et strictement avant la  $(N + 1)$ -ième impulsion au temps  $I[N + 1]$ . La connaissance de  $T^n$  est équivalente à celle de  $\{\Delta^{N-1}, T[n]\}$ , car avant  $I[N] + 1$  la séquence est déterminée par l'ensemble des temps inter-impulsion  $\Delta^{N-1}$ , puis la séquence est entièrement déterminée par  $T[n]$  entre  $I[N] + 1$  et  $n$ . D'après la définition des probabilités conditionnelles, nous écrivons pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \Pr(T[n + 1] = 0 \mid T[n] = t, T^{n-1}) &= \Pr(T[n + 1] = 0 \mid T[n] = t, \Delta^{N-1}) \\ &= \frac{\Pr(T[n + 1] = 0, T[n] = t \mid \Delta^{N-1})}{\Pr(T[n] = t \mid \Delta^{N-1})} \end{aligned}$$

L'événement  $\{T[n + 1] = 0, T[n] = t\}$  correspond à l'arrivée d'une impulsion avec un temps de séjour  $\Delta[N]$  valant  $t + 1$  et la position de la dernière impulsion  $I[N]$  étant à  $n - t$ . L'événement  $T[n] = t$  correspond au fait que le temps de séjour est supérieur à  $t + 1$ , mais la position de la dernière impulsion reste à  $n - t$ . En remplaçant cela dans l'égalité précédente et en utilisant de nouveau la définition des probabilités conditionnelles, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Pr(T[n + 1] = 0 \mid T[n] = t, T^{n-1}) &= \frac{\Pr(\Delta[N] = t + 1, I[N] = n - t \mid \Delta^{N-1})}{\Pr(\Delta[N] = t + 1, I[N] = n - t \mid \Delta^{N-1})} \\ &= \frac{\Pr(\Delta[N] = t + 1 \mid I[N] = n - t, \Delta^{N-1})}{\Pr(\Delta[N] = t + 1 \mid I[N] = n - t, \Delta^{N-1})} \end{aligned}$$

En supposant que le dernier instant d'impulsion  $I[N]$  est indépendant de la séquence des temps de séjour  $\Delta^N$  et que cette séquence est *i.i.d.*, nous obtenons :

$$\Pr(T[n + 1] = 0 \mid T[n] = t, T^{n-1}) = \frac{\Pr(\Delta[N] = t + 1)}{\Pr(\Delta[N] = t + 1)}$$

La probabilité  $\Pr(T[n + 1] = 0 \mid T[n] = t, T^{n-1})$  ne dépend que de la valeur de  $T[n]$ , ce qui montre que  $T[n]$  est markovien. De plus, nous remarquons que  $\Pr(T[n + 1] = 0 \mid T[n] = t)$  peut s'écrire avec l'expression du taux de hasard de la formule (3.6).

- La probabilité pour le cas  $T[n + 1] = t + 1$  est déduite de la première d'après le deuxième axiome des probabilités [Kolmogorov 50] (la somme des probabilités de tous les événements de l'univers, ici  $\{0, t + 1\}$ , vaut 1). Cela montre la formule (3.8).
- Nous proposons d'explicitier la loi marginale  $T[n + 1]$ . Notons la distribution invariante  $\Pr(T[n] = t)$  par  $\rho(t)$ . D'après la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire  $\rho(t)$  comme solution de l'équation

$$\rho(t') = \sum_{t \geq 0} \Pr(T[n] = t' \mid T[n - 1] = t) \rho(t)$$

En introduisant la formule (3.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\rho(t') &= \sum_{t \geq 0} \rho(t) \begin{cases} r(t+1) & \text{si } t' = 0 \\ 1 - r(t+1) & \text{si } t' = t+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \sum_{t \geq 0} [\rho(t)r(t+1)\delta(t') + \rho(t)(1 - r(t+1))\delta(t' - t - 1)] \\ &= \rho(t' - 1)(1 - r(t')) + \delta(t') \sum_{t \geq 0} \rho(t)r(t+1)\end{aligned}$$

Dans l'expression de  $\rho(t')$ ,  $\delta(t') = 0$  tant que  $t' \geq 1$ . Par récurrence sur  $t'$  : nous multiplions successivement les termes  $(1 - r(t'))$ , excepté en  $t' = 0$ , où nous multiplions par le terme  $\sum_{t \geq 0}^{\infty} \rho(t)r(t+1)$ . Ce dernier terme ne dépend pas de  $t'$  : cette constante de proportionnalité sera calculée par normalisation. L'expression de  $\rho(t')$  est, à une constante près :

$$\rho(t') = \rho(0)(1 - r(1))(1 - r(2)) \dots (1 - r(t' - 1))(1 - r(t')) \propto \prod_{\tau=1}^{t'} (1 - r(\tau))$$

Nous remarquons, d'après les formules (3.5) et (3.6), l'identité suivante :

$$1 - r(t) = \frac{s(t) - p(t)}{s(t)} = \frac{(\sum_{\tau=t}^{+\infty} p(\tau)) - p(t)}{s(t)} = \frac{\sum_{\tau=t+1}^{+\infty} p(\tau)}{s(t)} = \frac{s(t+1)}{s(t)}$$

En remarquant que  $s(0) = 1$ , nous injectons la formule précédente dans l'expression de  $\rho(t')$  :

$$\rho(t') \propto \prod_{\tau=1}^{t'} (1 - r(\tau)) \propto \frac{s(t'+1)}{s(t)} \frac{s(t')}{s(t'-1)} \dots \frac{s(3)}{s(2)} \frac{s(2)}{s(1)} \propto s(t'+1)$$

Nous calculons la constante de normalisation de  $\rho(t')$  (d'après le deuxième axiome des probabilités) :

$$\sum_{t' \geq 0} (\rho(t')) = \sum_{t' \geq 0} (s(t'+1)) = \sum_{t' \geq 0} \sum_{\tau=t'+1}^{\infty} (\Pr(\Delta = \tau)) = \sum_{t' \geq 0} (t' \Pr(\Delta = t')) = E\{\Delta\}$$

Comme la formule reste vraie pour tout  $t' \geq 0$ , la formule (3.8) est démontrée.

- Le nombre d'impulsions moyen de la séquence  $E\{U[n]\}$  est obtenu grâce à la relation entre les processus  $U$  et  $T$  et grâce à l'application en  $t=0$  de la formule (3.9) :

$$E\{U[n]\} = E\{\delta(T[n])\} = \Pr(T[n]=0) = \rho(0) = 1/E\{\Delta\}$$

## B Encadrement de l'espérance d'une variable suivant une loi de Weibull discrète

D'après la démonstration de la propriété 1 et la définition de  $s(t)$  en formule (3.5), nous développons l'espérance du processus  $U[n]$  pour une loi de Weibull discrète (les termes de la masse de probabilité tendent vers 0 et s'annulent de proche en proche) :

$$E\{\Delta[N]|\Theta\} = \sum_{\tau \geq 0} s(\tau + 1, \Theta) = \sum_{\tau \geq 0} \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^\beta \right]$$

Nous réalisons l'encadrement de la somme avec  $\beta \geq 1$  :

$$0 \leq \sum_{\tau \geq 0} \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^\beta \right] \leq \sum_{\tau \geq 0} \exp \left[ - \frac{\tau}{t_0} \right] = \frac{1}{1 - \exp \left[ - \frac{1}{t_0} \right]}$$

De plus, les termes de la somme sont strictement positifs, décroissants et tendent vers 0. D'après ces propriétés et l'encadrement, nous déduisons que la somme converge.

Nous pouvons alors utiliser le test de comparaison série-intégrale (ou test de Maclaurin–Cauchy). Nous encadrons la somme par des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^\beta \right] d\tau \leq \sum_{\tau \geq 0} \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^\beta \right] \leq \exp[0] + \int_0^{+\infty} \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^\beta \right] d\tau$$

Par un changement de variable en  $x = \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^\beta$  ( $dx = \frac{\beta \tau^{\beta-1}}{t_0^\beta} d\tau$ ), nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t_0}{\beta} x^{-1+\frac{1}{\beta}} e^{-x} dx \leq 1 + \mathbb{E}\{\Delta[N]|\Theta\} \leq 1 + \int_0^{+\infty} \frac{t_0}{\beta} x^{-1+\frac{1}{\beta}} e^{-x} dx.$$

Nous reconnaissons la définition de la fonction Gamma d'Euler  $x \mapsto \Gamma(x)$  appliquée en  $1/\beta$ , ce qui permet d'en déduire :

$$\frac{t_0}{\beta} \Gamma \left( \frac{1}{\beta} \right) \leq \mathbb{E}\{\Delta[N]|\Theta\} \leq 1 + \frac{t_0}{\beta} \Gamma \left( \frac{1}{\beta} \right)$$

En remarquant une propriété de la fonction Gamme d'Euler ( $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ ), nous donnons l'encadrement de l'espérance :

$$t_0 \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \leq \mathbb{E}\{\Delta[N]|\Theta\} \leq 1 + t_0 \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (1)$$

Ce qui montre la formule (3.11).

## C Approximation de la matrice hessienne

Nous calculons une approximation de la matrice hessienne de la fonction objectif  $J''_{\Gamma^n}$ . Nous oublions le premier terme de la somme, puis avec l'approximation ergodique suivante :

$$J''_{\Gamma^n}(\theta) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n Q''_{\Gamma^k}(\theta) \approx \mathbb{E} \left\{ \underbrace{Q''_{\Gamma^k}(\theta)}_{\frac{\partial^2 \ell(t, t', \theta)}{\partial \theta^2}} \right\}$$

où la notation  $\ell(t, t', \theta) = Q''_{\Gamma^k}(\theta) = -\ln(\mathbb{T}[k]=t|\Theta=\theta, \mathbb{T}[k-1]=t')$  a été utilisée.

Nous développons l'approximation avec la formule de l'espérance totale sur  $\mathbb{T}[k-1]$  :

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\mathbb{T}[k], \mathbb{T}[k-1], \theta)}{\partial \theta^2} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\mathbb{T}[k], \mathbb{T}[k-1], \theta)}{\partial \theta^2} \mid \mathbb{T}[k-1] \right\} \right\}$$

Or,  $\mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\mathbb{T}[k], \mathbb{T}[k-1], \theta)}{\partial \theta^2} \mid \mathbb{T}[k-1] \right\}$  est la matrice d'information de Fisher de la loi de transition des temps de séjour (loi explicitée à la propriété 1). Nous en donnons une forme alternative :

$$\mathbb{E} \left\{ \left[ \frac{\partial \ell(\mathbb{T}[k], \mathbb{T}[k-1], \theta)}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial \ell(\mathbb{T}[k], \mathbb{T}[k-1], \theta)}{\partial \theta} \right]^\top \mid \mathbb{T}[k-1] \right\}$$

À nouveau, par la formule de l'espérance totale :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n Q''_{T^k}(\boldsymbol{\theta}) \approx E \left\{ \underbrace{\left[ \frac{\partial \ell(T[k], T[k-1], \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]}_{Q'_{T^k}(\boldsymbol{\theta})} \left[ \frac{\partial \ell(T[k], T[k-1], \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^\top \right\}$$

Finalement par approximation ergodique, nous obtenons :

$$J''_{T^n}(\boldsymbol{\theta}) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n Q''_{T^k}(\boldsymbol{\theta}) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n [Q'_{T^k}(\boldsymbol{\theta})] [Q'_{T^k}(\boldsymbol{\theta})]^\top$$

Ce qui conclue la justification de la méthode d'optimisation hors-ligne présentée par les formules en (3.15).

## D Calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour $t_0$

Supposons que  $\beta$  vaille 1 et introduisons la notation  $\lambda = 1 - \exp \left[ \frac{-1}{t_0 - t_R} \right]$ , avec  $\lambda \in ]0; 1[$ . Alors, pour une loi de Weibull discrète :

$$r(t, \boldsymbol{\Theta} = \lambda) = \begin{cases} 1 - \exp \left[ \frac{t-1-t_R}{t_0-t_R} - \frac{t-t_R}{t_0-t_R} \right] & \text{si } t > t_R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \lambda & \text{si } t > t_R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En reportant la formule précédente et la formule (3.9) dans la formule (3.13) (caractérisant la fonction objectif  $J_{t^n}$  qui contient le terme initial  $J_{t^1}(\lambda)$ ), nous obtenons, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} J_{t^n}(\lambda) &= \frac{1}{n} J_{t^1}(\lambda) - \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \ln \Pr(T[j] = t[j] \mid \Lambda = \lambda, T[j-1] = t[j-1]) \\ &= -\frac{1}{n} \ln \frac{s(t[1] + 1, \lambda)}{E\{\Delta[N] \mid \Lambda = \lambda\}} - \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \ln \begin{cases} \lambda & \text{si } t[j] = 0 \text{ et } t[j-1] > t_R \\ 1 - \lambda & \text{si } t[j] = t[j-1] + 1 \text{ et } t[j-1] > t_R \\ 1 & \text{si } t[j] = t[j-1] + 1 \text{ et } 0 < t[j-1] \leq t_R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Les quatre cas correspondent respectivement à la probabilité d'un événement (sachant que nous sommes après la période réfractaire), la probabilité de ne pas avoir d'événement (sachant que nous sommes après la période réfractaire), la transition de proche en proche (lors de la période réfractaire) et les autres transitions (qui sont impossibles). Nous remarquons que pour chacun des quatre cas, les probabilités s'expriment par des constantes, ce qui nous amène à compter les occurrences de chacune de ces possibilités. Nous noterons par  $N_0$  le nombre d'impulsions, par  $N_1$  le nombre d'instants où le temps de séjour est supérieur au temps réfractaire et par  $M$  la valeur initiale  $t[1] - t_R$  (telle que  $t[1] > t_R$ ). De plus, grâce à la formule (3.5), nous développons  $s(t[1] + 1, \lambda)$  :

$$s(t[1] + 1, \lambda) = (1 - \lambda)^{t[1] - t_R}$$

En remarquant que  $E\{\Delta[N] \mid \Lambda = \lambda\} = t_R + 1/\lambda$  dans le cas où  $\beta = 1$ , la fonction objectif s'écrit :

$$\begin{aligned} J_{t^n}(\lambda) &= -\frac{1}{n} [N_0 \ln \lambda + N_1 \ln (1 - \lambda) + \ln s(t[1] + 1, \lambda) - \ln (E\{\Delta[N] \mid \Lambda = \lambda\})] \\ &= -\frac{1}{n} [(N_0 + 1) \ln \lambda + (N_1 + M) \ln (1 - \lambda) - \ln (\lambda t_R + 1)] . \end{aligned}$$

En optimisant  $J_{t^n}(\lambda)$  par rapport à  $\lambda$ , nous obtenons une équation du second degré en  $\lambda$  (à valeur dans  $]0, 1[$ ) :

$$[N_0 + N_1 + M] \lambda^2 + \left[ \frac{N_0 + N_1 + M}{t_R} - \left( N_0 - \frac{1}{t_R} \right) \right] \lambda - \frac{N_0 + 1}{t_R} = 0$$

Cette équation a une unique solution au problème posé :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2t_R} \left[ - \left( 1 - \frac{N_0 t_R - 1}{N_0 + N_1 + M} \right) + \sqrt{\left( 1 - \frac{N_0 t_R - 1}{N_0 + N_1 + M} \right)^2 + 4t_R \frac{N_0 + 1}{N_0 + N_1 + M}} \right]$$

Ce qui conclue la preuve de propriété 2.

## E Méthode d'optimisation en ligne du critère de maximum de vraisemblance

La récurrence sur l'estimateur est donnée par :

$$\hat{\theta}_{t^n} = \hat{\theta}_{t^{n-1}} - G_{t^n}^{-1} R_{t^n}$$

où  $R_{t^n}$  et  $G_{t^n}$  sont respectivement les dérivées première et seconde de  $J_{t^n}(\theta)$ . Pour calculer la dérivée première du critère, nous réécrivons la formule (3.13) sous forme de somme :

$$J_{t^n}(\theta) = \frac{1}{n} Q_{t^n}(\theta) + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) J_{t^{n-1}}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Q_{t^j}(\theta)$$

Dans le cadre d'un schéma récursif, nous ne voulons pas réévaluer  $J_{t^{n-1}}(\hat{\theta}_{t^n})$  à chaque étape. Nous approximations alors  $\hat{\theta}_{t^n}$  par  $\hat{\theta}_{t^{n-1}}$  pour effectuer les mises à jour et calculer le critère de manière récursive. De plus, en se plaçant en  $\hat{\theta}_{t^{n-1}}$  (minimum de  $J_{t^{n-1}}(\theta)$ , la dérivée  $J_{t^{n-1}}(\hat{\theta}_{t^{n-1}})$  s'y annule par définition), considérant que  $\hat{\theta}_{t^n}$  et  $\hat{\theta}_{t^{n-1}}$  sont proches, nous obtenons la dérivée approchée du gradient :

$$\frac{\partial J_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}})}{\partial \theta} \approx \frac{1}{n} \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\theta}_{t^{n-1}})}{\partial \theta} = R_{t^n}$$

Pour la matrice hessienne, nous dérivons deux fois la forme exacte de  $J_{t^n}(\theta)$  par rapport à  $\theta$ , puis par approximation ergodique :

$$G_{t^n} = \frac{\partial^2 J_{t^n}(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 Q_{t^k}(\theta)}{\partial \theta^2} \approx \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^2 Q_{t^n}(\theta)}{\partial \theta^2} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\theta)}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\theta)}{\partial \theta} \right]^\top \right\}$$

car  $Q_{t^n}$  s'exprime comme le logarithme d'une probabilité, nous pouvons le déduire à partir de la forme de la matrice d'information de Fisher (voir démonstration annexe C). En réinjectant cette approximation dans la forme récursive du critère et en utilisant l'approximation ergodique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J_{t^n}(\theta)}{\partial \theta^2} &\approx \mathbb{E} \left\{ \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\theta)}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\theta)}{\partial \theta} \right]^\top \right\} \\ &\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial Q_{t^k}(\theta)}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^k}(\theta)}{\partial \theta} \right]^\top \\ &\approx \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\theta)}{\partial \theta} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\theta)}{\partial \theta} \right]^\top + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \frac{\partial^2 J_{t^{n-1}}(\theta)}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

Nous nous plaçons en  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}}$  :

$$\frac{\partial^2 J_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \approx \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^\top + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\partial^2 J_{t^{n-1}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}$$

De nouveau, nous ne voulons pas réévaluer la dérivée seconde du critère en  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}}$  ; par contre nous avons accès à la dérivée seconde en  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-2}}$  grâce de la récursivité sur  $R_{t^n}$ . Dans le cas où  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-2}}$  sont proches, nous écrivons [Schraudolph 07] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} &\approx \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^\top + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\partial^2 J_{t^{n-1}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-2}})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \\ G_{t^n} &= \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial Q_{t^n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t^{n-1}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^\top + \left(1 - \frac{1}{n}\right) G_{t^{n-1}} \end{aligned}$$

Ce qui conclue la preuve pour la méthode d'estimation en ligne.

## F Estimation de la variance par maximum de vraisemblance

Soit  $W$  un processus *i.i.d.* dont la loi de tirage est une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, v)$  de variance  $v$  inconnue. Nous cherchons à estimer la variance en maximisant la vraisemblance. Connaissant une réalisation  $w[1], \dots, w[n]$ , nous écrivons la vraisemblance :

$$\mathcal{L}(w[1], \dots, w[n], v) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{w[i]^2}{2v}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n w[i]^2}{2v}\right)$$

Nous dérivons la vraisemblance par rapport à  $v$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_v}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \left[ -\frac{n}{2v} + \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n w[i]^2 \right] \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n w[i]^2}{2v}\right)$$

que nous maximisons, pour  $v > 0$  :

$$\hat{v}[n] = \frac{\sum_{i=1}^n w[i]^2}{n}$$

Finalement, nous écrivons cet estimateur sous forme récursive, pour tout  $n \geq 2$  :

$$\hat{v}[n] = \frac{1}{n} w[n]^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \hat{v}[n-1]$$

## G Preuve de la propriété 3 : loi *a posteriori* d'une séquence

Nous entrons dans la récurrence avec  $\Pr^{n-1}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  (initialisation :  $\Pr^0(\mathbf{T}^1 = \mathbf{t}^1)$ , développée dans la propriété 1 avec la formule (3.9)). Afin d'obtenir la loi *a posteriori* de la séquence des temps de séjour, nous développons  $\Pr^n(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  en utilisant le théorème de Bayes :

$$\Pr^n(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) = \Pr^{n-1}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n | Y[n]) = \frac{p_{Y[n]|\mathbf{T}^n}^{n-1}(Y[n], \mathbf{t}^n) \Pr^{n-1}(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)}{p_{Y[n]}^{n-1}(Y[n])}$$

Le terme  $p_{Y[n]}^{n-1}(Y[n])$  ne dépend pas de  $\mathbf{T}^n$  : c'est une constante de normalisation commune à toutes les séquences, qui n'a pas lieu d'être calculée. Le terme  $p_{Y[n]|\mathbf{T}^n}^{n-1}(Y[n], \mathbf{t}^n)$  n'est autre que la loi gaussienne de moyenne  $\hat{Y}_{\mathbf{t}^n}^{n-1}$  et de variance  $\nu_{\mathbf{t}^n}$  fournies par le filtre de Kalman.



Nous continuons le développement en utilisant la définition des probabilités conditionnelles, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \Pr^n(\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{t}^{n+1}) &= \Pr^n(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1], \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \\ &= \Pr^n(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \Pr^n(\mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \end{aligned} \quad (2)$$

Remarquons que connaissant les temps de séjour jusqu'à l'instant  $n$ , la connaissance de l'observation jusqu'à l'instant  $n$  n'apporte aucune information sur les futurs temps de séjour :

$$\Pr^n(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{T}^n) = \Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{T}^n)$$

Les sources étant indépendantes :

$$\Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{T}^n) = \prod_{i=1}^{n_{\text{MU}}} \Pr(T_i[n+1] = t_i[n+1] | T_i^n)$$

D'après la formule de l'espérance totale :

$$\Pr(T_i[n+1] = t_i[n+1] | T_i^n) = E\{\Pr(T_i[n+1] = t_i[n+1] | T_i^n, \Theta_i) | T_i^n\}$$

et l'hypothèse markovienne :

$$\Pr(T_i[n+1] = t_i[n+1] | T_i^n) = E\{\Pr(T_i[n+1] = t_i[n+1] | T_i[n], \Theta_i) | T_i^n\}$$

Nous introduisons la formule (3.8) :

$$\Pr(T_i[n+1] = t_i[n+1] | T_i^n) = \begin{cases} E\{r(t_i[n] + 1, \Theta_i) | T_i^n\} & \text{si } t_i[n+1] = 0 \\ 1 - E\{r(t_i[n] + 1, \Theta_i) | T_i^n\} & \text{si } t_i[n+1] = t_i[n] + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui conclut la démonstration.

## H Loi a posteriori d'une séquence à nombre de sources inconnues

Comme dans la preuve G précédente, nous entrons dans la récurrence avec  $\Pr^{n-1}(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  (l'initialisation se fait par  $\Pr^0(\mathbf{A}^1 = \mathbf{a}^1, \mathbf{T}^1 = \mathbf{t}^1)$ ) et nous obtenons, grâce au théorème de Bayes, l'expression de la probabilité a posteriori  $\Pr^n(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  :

$$\Pr^n(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \propto \Pr^{n-1}(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) g(Y[n] - \hat{Y}_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n}^{n-1}, \nu_{\mathbf{a}^n, \mathbf{t}^n})$$

où la prédiction  $\hat{Y}_{\mathbf{t}^n}^{n-1}$  et la variance  $\nu_{\mathbf{t}^n}$  sont fournies par le filtre de Kalman.

Nous continuons le développement en utilisant la définition des probabilités conditionnelles, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \Pr^n(\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{t}^{n+1}) &= \Pr^n(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1], \mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1], \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \\ &= \Pr^n(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1], \mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \times \\ &\quad \Pr^n(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \\ &= \Pr^n(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] | \mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1], \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \times \\ &\quad \Pr^n(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1] | \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \times \\ &\quad \Pr^n(\mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \end{aligned}$$

Remarquons que, connaissant les sources actives et les temps de séjour jusqu'à l'instant  $n$ , la connaissance de l'observation jusqu'à l'instant  $n$  n'apporte aucune information sur les futures sources actives ou inactives ni sur les temps de séjour :

$$\begin{cases} \Pr^n(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1] \mid \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) = \Pr(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1] \mid \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \\ \Pr^n(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1], \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) = \\ \Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1], \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n) \end{cases}$$

Nous avons déjà proposé une expression de la probabilité  $\Pr(\mathbf{A}[n+1] = \mathbf{a}[n+1] \mid \mathbf{A}^n = \mathbf{a}^n, \mathbf{T}^n = \mathbf{t}^n)$  dans le paragraphe « Transition » de la section 5.1. Pour le deuxième terme, nous utilisons la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1], \mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n) \\ = \mathbb{E}\{\Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1], \Theta[n+1], \mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n) \mid \mathbf{A}[n+1], \mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n\} \end{aligned}$$

Or nous avons défini dans le paragraphe « Transition » de la section 5.1 cette probabilité. Comme chaque source est indépendante, la formule précédente devient :

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1], \mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n) \\ = \mathbb{E}\{\Pr(\mathbf{T}[n+1] = \mathbf{t}[n+1] \mid \mathbf{A}[n+1], \Theta[n+1], \mathbf{A}[n], \mathbf{T}[n]) \mid \mathbf{A}[n+1], \mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n\} \\ = \mathbb{E}\left\{ \prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \cap \mathbf{A}[n]} \Pr(\mathbf{T}_i[n+1] = \mathbf{t}_i[n+1] \mid \Theta_i[n+1], \mathbf{T}_i[n]) \times \right. \\ \left. \prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \setminus \mathbf{A}[n]} \Pr(\mathbf{T}_i[n+1] = \mathbf{t}_i[n+1] \mid \Theta_i[n+1]) \mid \mathbf{A}[n+1], \mathbf{A}^n, \mathbf{T}^n \right\} \\ = \prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \cap \mathbf{A}[n]} \mathbb{E}\{\Pr(\mathbf{T}_i[n+1] = \mathbf{t}_i[n+1] \mid \Theta_i[n+1], \mathbf{T}_i[n]) \mid \mathbf{A}^n, \mathbf{T}_i^n\} \\ \prod_{i \in \mathbf{A}[n+1] \setminus \mathbf{A}[n]} \mathbb{E}\{\Pr(\mathbf{T}_i[n+1] = \mathbf{t}_i[n+1] \mid \Theta_i[n+1])\} \end{aligned}$$

Nous introduisons la formule (3.8) dans le premier produit (probabilité *a priori* du futur temps de séjour) et la formule (3.9) dans le second produit (activation de source) pour conclure la démonstration des formules (5.10), (5.11) et (5.12).

# Bibliographie

- [Adee 08] S. Adee. *Dean Kamen's Luke Arm Prosthesis Readies for Clinical Trials*. IEEE Spectrum, Biomedical, Bionics, February 2008. [21](#)
- [Barbu 08] V. Barbu & N. Limnios. *Reliability theory for discrete-time semi-Markov systems*. In Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications, volume 191 of *Lecture Notes in Statistics*, pages 1–30. Springer New York, 2008. [29](#)
- [Basseville 93] M. Basseville & I.V. Nikiforov. *Detection of abrupt changes - Theory and application*. Prentice-Hall, Inc., 1993. [50](#)
- [Battye 55] C.K. Battye, A. Nightingale & J. Whillis. *The use of myo-electric currents in the operation of prostheses*. J. of Bone & Joint Surgery, British Volume, vol. 37, no. 3, pages 506–510, 1955. [21](#)
- [Baum 70] L.E. Baum, T. Petrie, G. Soules & N. Weiss. *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*. The Ann. of Mathematical Statistics, vol. 41, no. 1, pages 164–171, 1970. [27](#)
- [Betts 76] R.P. Betts, D.M. Johnston & B.H. Brown. *Nerve fibre velocity and refractory period distributions in nerve trunks*. J. of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry, vol. 39, no. 7, pages 694–700, 1976. [30](#)
- [Bigland 54] B. Bigland & O.C.J. Lippold. *The relation between force, velocity and integrated electrical activity in human muscles*. J. of Physiology, vol. 123, pages 214–224, 1954. [19](#), [21](#)
- [Chou 96] C.-P. Chou & B. Hannaford. *Measurement and modeling of McKibben pneumatic artificial muscles*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 12, no. 1, pages 90–102, 1996. [23](#)
- [Cipriani 10] C. Cipriani, M. Controzzi & M.C. Carrozza. *Objectives, criteria and methods for the design of the SmartHand transradial prosthesis*. Robotica, vol. 28, pages 919–927, 10 2010. [23](#)
- [Cocozza-Thivent 97] C. Cocozza-Thivent. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, volume 28. Springer, 1997. [28](#)
- [Englehart 95] K. Englehart, B. Hudgins, M. Stevenson & P.A. Parker. *Classification of myoelectric signal burst patterns using a dynamic neural network*. In Proc. of the 1995 IEEE 21st Ann. Northeast Bioengineering Conf., pages 63–64, 1995. [24](#)
- [Englehart 98] K. Englehart. *Signal representation for classification of the transient myoelectric signal*. PhD thesis, University of New Brunswick, 1998. [22](#), [24](#)

- [Englehart 99] K. Englehart, B. Hudgins, P. Parker & M. Stevenson. *Classification of the myoelectric signal using time-frequency based representations*. Medical Engineering and Physics, vol. 21, pages 431–438, 1999. [24](#)
- [Englehart 01] K. Englehart, B. Hudgins & P. Parker. *A wavelet-based continuous classification scheme for multifunction myoelectric control*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 48, no. 3, pages 302–311, March 2001. [24](#)
- [Evensen 03] G. Evensen. *The Ensemble Kalman Filter : theoretical formulation and practical implementation*. Ocean Dynamics, vol. 53, no. 4, pages 343–367, November 2003. [49](#)
- [Farina 00] D. Farina & R. Merletti. *Comparison of algorithms for estimation of EMG variables during voluntary isometric contractions*. J. of Electromyography and Kinesiology, vol. 10, no. 5, pages 337–349, 2000. [24](#)
- [Farina 01] D. Farina, A. Crosetti & R. Merletti. *A model for the generation of synthetic intramuscular EMG signals to test decomposition algorithms*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 48, no. 1, pages 66–77, January 2001. [25](#)
- [Ferris 09] D.P. Ferris & C.L. Lewis. *Robotic lower limb exoskeletons using proportional myoelectric control*. In Ann. Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 2009. EMBC 2009., pages 2119–2124, 2009. [22](#)
- [Fougner 12] A. Fougner, O. Stavdahl, P. Kyberd, Y. Losier & P. Parker. *Control of upper limb prostheses : terminology and proportional myoelectric control - A review*. IEEE Trans. on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, vol. 20, no. 5, 2012. [15](#)
- [Furcy 05] D. Furcy & S. König. *Limited discrepancy beam search*. In Proc. of the 19th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence, pages 125–131, 2005. [47](#)
- [Ge 08] D. Ge, É. Le Carpentier, D. Farina & J. Idier. *Unsupervised Bayesian EMG decomposition algorithm using tabu search*. In 1st Int. Symp. on Applied Sciences on Biomedical and Communication Technologies, 2008. ISABEL '08., pages 1–5, Aalborg, Denmark, October 2008. [24](#)
- [Ge 09] D. Ge. *Déconvolution impulsionnelle multi-sources. Application aux signaux électromyographiques*. PhD thesis, École Centrale Nantes, 2009. [24](#)
- [Ge 11] D. Ge, É. Le Carpentier, J. Idier & D. Farina. *Spike sorting by stochastic simulation*. IEEE Trans. on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, vol. 19, no. 3, pages 249–259, 2011. [23](#)
- [Graupe 75] D. Graupe & W.K. Cline. *Functional separation of EMG signals via ARMA identification methods for prosthesis control purposes*. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-5, no. 2, pages 252–259, 1975. [24](#)
- [Guizzo 05] E. Guizzo & H. Goldstein. *The rise of the body bots [robotic exoskeletons]*. IEEE Spectrum, vol. 42, no. 10, pages 50–56, October 2005. [24](#)
- [Gut 00] R. Gut & G.S. Moschytz. *High-precision EMG signal decomposition using communication techniques*. IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 48, no. 9, pages 2487–2494, 2000. [24](#)

- [Haga 13] T. Haga, O. Fukayama, Y. Takayama, T. Hoshino & K. Mabuchi. *Efficient sequential Bayesian inference method for real-time detection and sorting of overlapped neural spikes*. J. of Neuroscience Methods, vol. 219, no. 1, pages 92 – 103, 2013. [23](#)
- [Hamon 13] A. Hamon, Y. Aoustin & S. Caro. *Two walking gaits for a planar bipedal robot equipped with a four-bar mechanism for the knee joint*. Multibody System Dynamics, pages 1–25, 2013. [23](#)
- [Hampel 08] D. Hampel & P. Lansky. *On the estimation of refractory period*. J. of Neuroscience Methods, vol. 171, no. 2, pages 288 – 295, 2008. [30](#)
- [Hargrove 07] L. Hargrove, Y. Losier, B. Lock, K. Englehart & B. Hudgins. *A real-time pattern recognition based myoelectric control usability study implemented in a virtual environment*. Proc. of the 29th Ann. Int. Conf. of the IEEE EMBS, 2007. [24](#)
- [Hargrove 08] L. Hargrove, K. Englehart & B. Hudgins. *A training strategy to reduce classification degradation due to electrode displacements in pattern recognition based myoelectric control*. Biomedical Signal Processing and Control, vol. 3, no. 2, pages 175–180, 2008. Surface Electromyography. [20](#)
- [Hershey 10] J.R. Hershey, S.J. Rennie, P.A. Olsen & T.T. Kristjansson. *Super-human multi-talker speech recognition : A graphical modeling approach*. Computer Speech & Language, vol. 24, no. 1, pages 45 – 66, 2010. Speech Separation and Recognition Challenge. [27](#)
- [Hill 38] A.V. Hill. *The heat of shortening and the dynamic constants of muscle*. In Proc. of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, volume 126, pages 136–195, October 1938. [22](#), [23](#)
- [Holobar 09] A. Holobar, D. Farina, M. Gazzoni, R. Merletti & D. Zazula. *Estimating motor unit discharge patterns from high-density surface electromyogram*. Clinical Neurophysiology, pages 120551–562, 2009. [23](#)
- [Hussain 12] T. Hussain & M. Ahmad. *Discrete inverse Gamma distribution*. In 9th Int. Conf. on Statistical Sciences, page 381, 2012. [30](#)
- [Jiang 08] N. Jiang, K. Englehart & P. Parker. *Estimating forces at multiple degrees of freedom from surface EMG using non-negative matrix factorization for myoelectric control*. Applied Sciences on Biomedical and Communication Technologies, 2008. [23](#)
- [Kalman 60] R.E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Trans. of the ASME - J. of Basic Engineering, pages 35–45, March 1960. [44](#)
- [Khan 89] M.S.A. Khan, A. Khalique & A.M. Abouammoh. *On estimating parameters in a discrete Weibull distribution*. IEEE Trans. on Reliability, vol. 38, no. 3, pages 348–350, August 1989. [35](#)
- [Khushaba 07] R.-N. Khushaba & A. Al-Jumaily. *Fuzzy wavelet packet based feature extraction method for multifunction myoelectric control*. Int. J. of Biological and Medical Sciences, pages 2–3, 2007. [24](#)
- [Kimura 78] J. Kimura, T. Yamada & R.L. Rodnitzky. *Refractory period of human motor nerve fibres*. J. of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry, vol. 41, no. 9, pages 784–790, 1978. [30](#)

- [Kolmogorov 50] A.N. Kolmogorov. Foundations of the theory of probability. Chelsea Publishing Co., 1950. [83](#)
- [Kuiken 09] T.A. Kuiken, G. Li & B.A. Lock. *Targeted muscle reinnervation for real-time myoelectric control of multifunction artificial arms*. J. of American Medical Association, vol. 301, no. 6, pages 619–628, 2009. [21](#), [22](#)
- [Kulasekera 94] K.B. Kulasekera. *Approximate MLE's of the parameters of a discrete Weibull distribution with Type-I censored data*. Microelectronics Reliability, vol. 34, no. 7, pages 1185–1188, 1994. [35](#)
- [Lefever 82a] R.S. Lefever & C.J. De Luca. *A procedure for decomposing the myoelectric signal into its constituent action potentials - Part I : technique, theory, and implementation*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 29, no. 3, page 149, March 1982. [24](#)
- [Lefever 82b] R.S. Lefever & C.J. De Luca. *A procedure for decomposing the myoelectric signal into its constituent action potentials - Part II : execution and test for accuracy*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 29, no. 3, page 158, March 1982. [24](#)
- [Lesser 95] V.R. Lesser, S.H. Nawab & F.I. Klassner. *IPUS : an architecture for the integrated processing and understanding of signals*. Artificial Intelligence, vol. 77, no. 1, pages 129 – 171, 1995. [24](#)
- [Li 13a] Q. Li, H. Zhang, S. Qi, M. Qiu, X. Chen, S. Chen & T. Wang. *Continuous detection of muscle aspect ratio using keypoint tracking in ultrasonography*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 60, no. 8, pages 2361–2369, 2013. [24](#)
- [Li 13b] Y. Li, L.H. Smith, L.J. Hargrove, D.J. Weber & G.E. Loeb. *Sparse Optimal Motor Estimation (SOME) for extracting commands for prosthetic limbs*. IEEE Trans. on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, vol. 21, no. 1, pages 104–111, January 2013. [23](#), [24](#)
- [Ljung 83] L. Ljung & T. Söderström. Theory and practice of recursive identification. The MIT Press, Massachusetts and London, 1983. [49](#)
- [Ljung 85] L. Ljung & T. Söderström. Theory and practice of recursive identification. MIT Press series in signal processing, optimization, and control. MIT Press, 1985. [37](#)
- [Luca 99] C.J. Luca & A. Adam. *Decomposition and Analysis of Intramuscular Electromyographic Signals*. In Uwe Windhorst & Håkan Johansson, editeurs, Modern Techniques in Neuroscience Research, pages 757–776. Springer Berlin Heidelberg, 1999. [24](#)
- [Martin 11] C. Martin. *Upper limb prostheses : A review of the literature with a focus on myoelectric hands*, 2011. [21](#)
- [Matsubara 13] T. Matsubara & J. Morimoto. *Bilinear Modeling of EMG Signals to Extract User-Independent Features for Multiuser Myoelectric Interface*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 60, no. 8, pages 2205–2213, 2013. [24](#)
- [McGill 05] K.C. McGill, Z.C. Lateva & H.R. Marateb. *EMGLAB : An interactive EMG decomposition program*. J. of Neuroscience Methods, vol. 149, no. 2, pages 121–133, December 2005. [24](#)



- [Merletti 75] R. Merletti, R. Acimovic, S. Grobelnik & G. Cvilak. *Electrophysiological orthosis for the upper extremity in hemiplegia : feasibility study*. Archives of Physical Medicine and Rehabilitation, vol. 56, no. 12, page 507, 1975. [23](#)
- [Miller 08] L.A. Miller, R.D. Lipschutz, K.A. Stubblefield, B.A. Lock, H. Huang, T.W. III Williams, R.F. Weir & T.A. Kuiken. *Control of a six degrees of freedom prosthetic arm after targeted muscle reinnervation surgery*. Archives of Physical Medicine and Rehabilitation, vol. 89, no. 11, pages 2057–2065, 2008. [21](#)
- [Monsifrot 11] J. Monsifrot, É. Le Carpentier, D. Farina & Y. Aoustin. *Sequential estimation of intramuscular EMG model parameters for prosthesis control*. In IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, Workshop on Robotics for Neurology and Rehabilitation, San Francisco, Ca, 2011. [23](#), [24](#)
- [Monsifrot 13] J. Monsifrot, É. Le Carpentier, Y. Aoustin & D. Farina. *Online estimation of EMG signals model based on a renewal process*. In ICASSP, IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vancouver, Canada, 2013. [23](#)
- [Mulas 05] M. Mulas, M. Folgheraiter & G. Gini. *An EMG-controlled exoskeleton for hand rehabilitation*. In 9th Int. Conf. on Rehabilitation Robotics, 2005. ICORR 2005, pages 371–374, 2005. [22](#)
- [Nakagawa 75] T. Nakagawa & S. Osaki. *The discrete Weibull distribution*. IEEE Trans. on Reliability, vol. R-24, no. 5, pages 300–301, December 1975. [30](#), [33](#)
- [Nawab 10] S.H. Nawab, S.-S. Chang & C.J. De Luca. *High-yield decomposition of surface EMG signals*. Clinical Neurophysiology, vol. 121, no. 10, pages 1602–1615, April 2010. [24](#)
- [Nielsen 09] J.L.G. Nielsen, S. Holmgaard, N. Jiang, K. Englehart, D. Farina & P. Parker. *Enhanced EMG signal processing for simultaneous and proportional myoelectric control*. 31st An. Int. Conf. of the IEEE EMBS, September 2009. [23](#)
- [Parker 06] P. Parker, K. Englehart & B. Hudgins. *Myoelectric signal processing for control of powered limb prostheses*. J. of Electromyography and Kinesiology, vol. 16, no. 6, pages 541–548, 2006. Special Section (pp. 541-610) : 2006 ISEK Congress. [24](#)
- [Pau 12] J.W.L. Pau, S.S.Q. Xie & A.J. Pullan. *Neuromuscular interfacing : establishing an EMG-driven model for the human elbow joint*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. 59, no. 9, pages 2586–2593, 2012. [23](#)
- [Peters 99] E.J.D. Peters & A.J. Fuglevand. *Cessation of human motor unit discharge during sustained maximal voluntary contraction*. Neuroscience Letters, vol. 274, no. 1, pages 66–70, 1999. [19](#)
- [Puchhammer 08] D.G. Puchhammer. *Michelangelo 03 - A versatile hand prosthesis, featuring superb controllability and sophisticated bio mimicry*. In Measuring Success in Upper limb Prosthetics, Fredericton, New Brunswick, Canada, August 2008. MEC'08. [21](#)
- [Pyke 61] R. Pyke. *Markov renewal processes : definitions and preliminary properties*. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 32, no. 4, pages 1231–1242, 1961. [28](#)
- [Rabiner 89] L. Rabiner. *A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition*. Proc. of the IEEE, vol. 77, no. 2, pages 257–286, 1989. [27](#)

- [Rengifo 10] C. Rengifo, Y. Aoustin, F. Plestan & C. Chevallereau. *Distribution of forces between synergistics and antagonistics muscles using an optimization criterion depending on muscle contraction behaviour*. J. of Biomechanical Engineering, vol. 142, no. 4, page 11, April 2010. [23](#)
- [Research 99] Roessingh Research & Development b.v. *European recommendations for surface electromyography, results of the SENIAM project*, 1999. SENIAM. [20](#), [23](#)
- [Roy 04] D. Roy. *Discrete Rayleigh distribution*. IEEE Trans.on Reliability, vol. 53, no. 2, pages 255–260, 2004. [33](#)
- [Sartori 13] M. Sartori, D. Farina & D.G. Lloyd. *Hybrid neuromusculoskeletal modeling*. In J.L. Pons, D. Torricelli & M. Pajaro, editeurs, *Converging Clinical and Engineering Research on Neurorehabilitation*, volume 1 of *Biosystems & Biorobotics*, pages 427–430. Springer Berlin Heidelberg, 2013. [22](#)
- [Schon 05] T. Schon, F. Gustafsson & P.-J. Nordlund. *Marginalized particle filters for mixed linear nonlinear state-space models*. IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 53, pages 2279–2289, 2005. [44](#)
- [Schraudolph 07] N.N. Schraudolph, J. Yu & S. Guenter. *A stochastic quasi-Newton method for on-line convex optimization*. In Proc. of 11th Int. Conf. on Artificial Intelligence and Statistics, 2007. [88](#)
- [Sharma 01] K. Sharma & J.C. Izpisua Belmonte. *Development of the limb neuromuscular system*. Current Opinion in Cell Biology, vol. 13, no. 2, pages 204–210, 2001. [19](#), [22](#)
- [Shreyder 59] Y. Shreyder. *Cybernetics*. Bol'shaya Meditsinskaya Entsiklopediya, vol. 12, pages 749–766, 1959. Moscow. [21](#)
- [Stashuk 01] D. Stashuk. *EMG signal decomposition : how can it be accomplished and used ?* J. of Electromyography and Kinesiology, vol. 11, no. 3, pages 151–173, 2001. [15](#), [20](#), [25](#)
- [Studer 84] R.M. Studer, R.J.P. de Figueiredo & G.S. Moschytz. *An algorithm for sequential signal estimation and system identification for EMG signals*. IEEE Trans. on Bio-medical Engineering., no. 3, pages 285–295, 1984. [24](#)
- [Toledo 09] C. Toledo, L. Leija, R. Munoz, A. Vera & A. Ramirez. *Upper limb prostheses for amputations above elbow : a review*. In Health Care Exchanges, 2009. PAHCE 2009. Pan American, pages 104–108, 2009. [21](#)
- [Tran 10] M.T. Tran, P. Soueres, M. Taix, M.N. Sreenivasa & C. Halgand. *Humanoid human-like reaching control based on movement primitives*. In RO-MAN, 2010 IEEE, pages 546–551, Sept. 2010. [23](#)
- [Venture 06] G. Venture, K. Yamane & Y. Nakamura. *Identification of human musculo-tendon subject specific dynamics using musculo-skeletal computations and non linear least square*. In The First IEEE/RAS-EMBS Int. Conf. on Biomedical Robotics and Bio-mechatronics, 2006. BioRob 2006., pages 211–216, Pisa, Italia, February 2006. [22](#), [23](#)



- [Viterbi 67] A.J. Viterbi. *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*. IEEE Trans. on Information Theory, vol. 13, no. 2, pages 260–269, 1967. [27](#), [47](#)
- [von Tscharner 10] V. von Tscharner. *Amplitude cancellations in surface EMG signals*. J. of Electromyography and Kinesiology, vol. 20, no. 5, pages 1021–1022, 2010. [21](#)
- [Wehner 12] M. Wehner. *Man to machine, applications in electromyography*. In Mark Schwartz, editeur, EMG Methods for Evaluating Muscle and Nerve Function, pages 427–454. InTech, 2012. [20](#)
- [Wheater 01] P.R. Wheeler, B. Young & J.W. Heath. *Histologie fonctionnelle*. de Boeck AND Larcier, 2001. [19](#)
- [Xia 94] Q. Xia, M. Rao, Y. Ying & X. Shen. *Adaptive fading Kalman Filter with an application*. Automatica, vol. 30, no. 8, pages 1333–1338, 1994. [50](#)
- [Yi 09] S. Yi, D. Wierstra, T. Schaul & J. Schmidhuber. *Stochastic search using the natural gradient*. In Proc. of the 26th Ann. Int. Conf. on Machine Learning, ICML '09, pages 1161–1168, New York, NY, USA, 2009. ACM. [36](#)
- [Zajac 02] F.E. Zajac. *Understanding muscle coordination of the human leg with dynamical simulations*. J. of Biomechanics, vol. 35, no. 8, pages 1011–1018, 2002. [23](#)





# Thèse de Doctorat

**Jonathan MONSIFROT**

**Modélisation de signaux électromyographiques par des processus de renouvellement - Filtre bayésien pour l'estimation séquentielle de paramètres à destination de la commande d'une prothèse d'avant-bras**

**Model of electromyographic signals by renewal processes - Bayes filter for a sequential estimation of parameters given to the command of an upper limb prosthesis**

## Résumé

Nous traitons des signaux électromyographiques intramusculaires (signaux iEMG) relevés dans les muscles de l'avant-bras. Les signaux iEMG représentent une image de la commande du système nerveux central vers les muscles. Ils se composent d'une superposition de trains d'ondelettes, chaque ondelette code un groupe de fibres musculaires et son taux de mise à feu code l'effort produit par ce groupe. L'objectif est d'extraire de façon séquentielle des informations du signal iEMG. Nous espérons que ces informations se révéleront utiles pour la commande d'une prothèse d'avant-bras. En premier lieu, nous modélisons un train d'impulsions comme une chaîne de Markov et nous discutons des lois pouvant caractériser le temps entre deux impulsions. La loi de Weibull discrète a retenu notre attention. Nous avons mis en place une méthode d'estimation en ligne de ses paramètres. En second lieu, nous modélisons le signal iEMG par un modèle de Markov caché s'appuyant sur le modèle de train d'impulsions ci-dessus. La mise en place d'un filtre bayésien nous permet de propager séquentiellement une estimation bayésienne des paramètres du modèle de Markov caché, en particulier la forme des ondelettes et leur taux de mise à feu. Nous proposons finalement une méthode d'estimation du nombre de trains d'ondelettes, un paramètre discret du modèle. Nous validons les méthodes et algorithmes proposés sur des signaux simulés et des signaux iEMG.

## Mots clés

prothèse d'avant-bras, signaux iEMG, train d'impulsions, loi de Weibull discrète, modèle de Markov caché, filtrage bayésien, estimation séquentielle, déconvolution aveugle.

## Abstract

We deal with intramuscular electromyographical signals (iEMG signals) taken in the muscles of a human upper limb. iEMG signal are an image of the control of the central nervous system on the muscles. They are made of a superimposition of wavelet trains, each wavelet codes a group of muscle fibers and its discharge rate codes the force developed by the group. The objective is to extract sequentially pieces of information from the signal iEMG. We believe that this information may be used to control an upper limb prosthesis.

In the first place, we model a spike train as a Markov chain and we present mass functions to model the inter-spike intervals. The discrete Weibull mass function holds our attention: we realize an online estimation of its parameters.

Secondly, we model the iEMG signal with a hidden Markov model based on the above model of spike train. We are able to propagate sequentially Bayes estimator of the parameters of the hidden Markov model with a Bayes filter, particularly the shapes of the wavelets and their discharge rates.

Finally, we propose a method to estimate the number of wavelet trains, a discrete parameter of the model.

We confirm the proposed methods and algorithms on simulated signals and iEMG signals.

## Key Words

upper limb prosthesis, iEMG signals, Markov process, spike trains, discrete Weibull density, hidden Markov model, Bayes filtering, sequential estimation, blind deconvolution.